ペトリネットを用いた機械とロボットから構成される生産工程の解析

山城光雄[1] ・加藤　養[2]

[1] 工学部創生工学科システム情報分野
[2] 大学院工学研究科情報・生産工学専攻

Analysis of Production Process composed of Two Machines and Two Robots using Petri Net

Mitsuo YAMASHIRO and Mamoru KATO

Abstract

In this paper, we assume that two machines can break down about a system of a production process which consists of two machines and two robots. It was analysed under the steady state by Markov chain using stochastic Petri net. Next, the triangular fuzzy number and the trapezoidal fuzzy number in this paper were introduced into the firing rate which supposed an exponential distribution, and it was applied to the result obtained from stochastic Petri net and a state probability of the steady state was derived using a convinced area of the level. It was possible to find a solution of a formulated optimization problem as a case of the trapezoidal fuzzy number.

Keywords: Production system, Petri nets, Two machines, Two robots, Fuzzy, Analysis

１．緒論

ペトリネットは非同期的かつ並列的にふるまう離散事象システムに対して，情報の流れや制御を記述し解析するために，C. A. Petri によって 1962 年に考えだされた．離散事象システムを扱う特徴は，事象生起の並行性，非同期性，および非決定性にあり．条件と事象を基本にシステムに関してモデル化して，数学的に解析する．

ペトリネットのトランジションの発火に対して遅れ時間を導入したものは，時間ペトリネットと呼ばれている．この時間に確率分布を仮定して展開したものが確率ペトリネットであり，さらにファジィ時間としたアプローチに拡張されている．Tuysuz ら[(1)] は 2 台の機械，2 台のロボット，コンベア，バッファから構成されるフレキシブル生産工程における素材から製品までの生産について，確率ペトリネットを用いてモデル化し,解析した．1 台の機械は故障するものとし，修理を行うことにより，稼動できる状態となる．ペトリネットを用いて部品の状態をマーキングで表し，トランジションの発火時間に指数分布を仮定して，状態の定常確率を求めた．また，発火時間に三角型ファジィ数を取り入れて解析した．その結果，得られたファジィ状態確率の分布が三角型として図示化して報告している．

本研究は，はじめに Tuysuz らの生産工程のモデルにおいて，Tuysuz らが扱った 1 台の機械が故障する仮定に対して他の 1 台の機械も故障すると仮定して，確率ペトリネットを用いてマルコフ連鎖により定常状態のもとで解析して，状態確率

を求める．つぎに，指数分布を仮定した発火率に Tuysuz ら同様に三角型ファジィ数を適用して解析する．その結果，得られたファジィ状態確率の分布が正確には三角型とはならず，三角形に似た分布の形状であることが明らかとなった．本研究では，三角型ファジィ数を拡張した台形型ファジィ数[2] を導入して，レベル の確信区間を用いて，確率ペトリネットから得られた解析結果に適用して定常状態の状態確率を求める．その結果，三角ファジィ数の場合と同様にファジィ状態確率の分布は正確には台形型とはならず，台形型に似た分布の形状であることが明らかとなった．さらに，定式化した最適化問題の解を求め，Tuysuz らの三角型ファジィ数の場合と比較検討する．

2．ペトリネットの要素と時間ペトリネット

この一般にペトリネットは，プレース，トランジション，有向アーク，トークンの 4 個の要素から構成されるグラフィック言語であり，図 1 に示す．プレースは円(丸)，トランジションは縦棒，有向アークはトランジションとプレースを結んでいる矢印で表す．プレースの中のトークンは，トランジションの発火によりプレースからプレースへ移動する．すなわち，トランジションが発火するには，入力プレースがすべてトー　クンをもたなければならない．トランジションが発火可能でトランジションが発火すると，入力トークンは消滅しその出力プレースにトークンが発生する．ペトリネット全体におけるトークンの配置をマーキングと呼び，これはプレースにトークンを割り当てることをいう．一般に，システムの初期状態を表すのに，初期マーキングが割り当てられる．

通常のペトリネットにおけるトランジションの発火は瞬時であるが，これに確定的な時間の概念を導入したのが時間ペトリネットである．すなわち，各トランジションについて，発火可能になって実際に発火するまでに遅れ時間を要し，時間に確率分布を 仮定したペトリネットを確率ペトリネットと呼んでいる．時間の導入方法により発火遅延時間，発火継続時間，プレース時間のモデルに分類されている．このとき，トランジションの縦棒は細長い長方形として内側を黒く塗り，瞬時の発火と区別している．

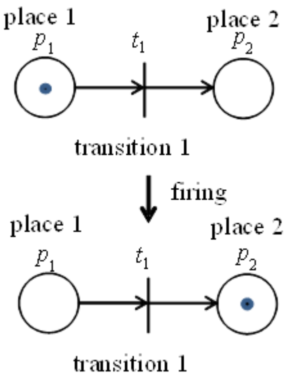


図 1　ペトリネットを構成する要素

3．　生産工程とそのペトリネット表現

2 台の機械，2 台のロボット，コンベアから構成されるフレキシブル生産工程を図 2 に示す．この図から，確率ペトリネットを用いてモデル化すると図 3 を得る．Tuysuz らは機械 のみが故障し，修理を行うことにより稼動できる状態となることを仮定した．本研究では稼動している機械 も故障すると仮定したが，極めて一般的である．フレキシブル生産工程を扱う際のペトリネットのプレースとトランジション，それらの意味を説明し，表 1 と表 2 に記す．

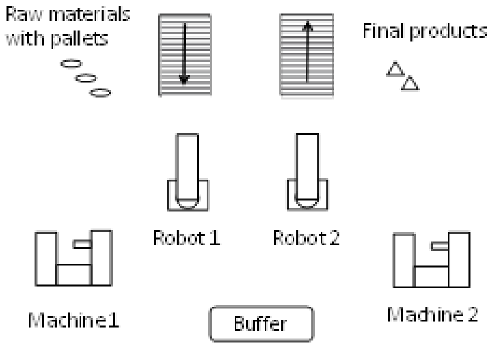


図 2　フレキシブル生産セル[1]
(Tuysuz, Kahraman)

表 1　プレースとその意味

Places	Interpretation
p_1	Pallets with pats available
p_2	Machine M_1 in process
p_3	Intermediate parts available for processing Machine M_2
p_4	Machine M_2 in process
p_5	Machine M_1 in repair
p_6	Machine M_2 in repair
p_7	Machine M_1 available
p_8	Conveyor slots available
p_9	Machine M_2 available
p_{10}	Robot R_1 available
p_{11}	Robot R_2 available

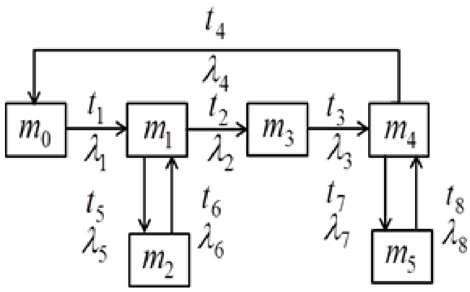


図 4　可達グラフ

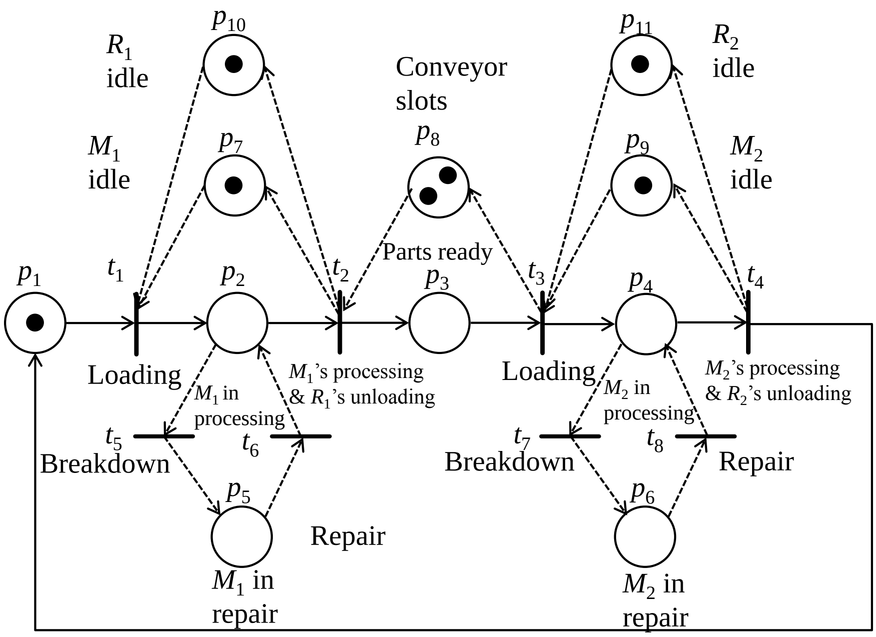


図 3　図 2 のペトリネット表現

図 3　図

表 2　トランジションとその意味

Transitions	Interpretation	Firing Rates
t_1	Robot R_1 loads a part to Machine M_1	λ_1=40
t_2	Machine M_1 machines and Robot R_1 unloads a part	λ_2=5
t_3	Robot R_2 loads a part to Machine M_2	λ_3=30
t_4	Machine M_2 machines and Robot R_2 unloads a part	λ_4=4
t_5	Machine M_1 breaks down	λ_5=0.5
t_6	Machine M_1 is repaired	λ_6=0.8
t_7	Machine M_2 breaks down	λ_7=0.4
t_8	Machine M_2 is repaired	λ_8=0.7

４．　確率ペトリネットを用いた解析

システム内の部品の有無, 機械とロボットの稼動, 非稼動状態をトークンの配置で表すマーキング m_i を用いて，図 3 から m_0 が表される．

$$m_i = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}, p_{11})$$
$$m_0 = (1,0,0,0,0,0,1,2,1,1,1)$$

m_0 を初期マーキングと呼んでいる．この m_0 から出発して，すべての発火可能なトランジションと対応するマーキングを書くと，次に示される．

$$m_1 = (0,1,0,0,0,0,0,2,1,0,1)$$
$$m_2 = (0,0,0,0,1,0,0,2,1,0,1)$$
$$m_3 = (0,0,1,0,0,0,1,1,1,1,1)$$
$$m_4 = (0,0,0,1,0,0,1,2,0,1,0)$$
$$m_5 = (0,0,0,0,0,1,1,2,0,1,0)$$

トランジションは表 2 に示した発火時間をもち，各トランジション t_j $(j = 1,2,\cdots,8)$ には発火率 λ_j を添えて，各マーキングの推移を可能にする可達グラフを図 4 に示す．トランジションの発火時間は指数分布に従う．

つぎに，各マーキング m_i $(i = 0,1,\cdots,5)$ に対応する定常状態のもとで π_i $(i = 0,1,\cdots,5)$ を用いて状態方程式を導くと，次式が得られる．

$$\Pi\Lambda = 0 \tag{1}$$

ここで，Π と Λ は次 式で表される．

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda_2+\lambda_5) & \lambda_5 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_6 & -\lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & \lambda_3 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda_4+\lambda_7) & \lambda_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & -\lambda_8 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{5} \pi_i = 1$$

(1) 式と (4) 式から発火率 λ_j に数値を代入して連立方程式を解くと，π_i $(i = 0,1,\cdots,5)$ が得られる．

$$\Pi^T = \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_6\lambda_8/\lambda \\ \lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_6\lambda_8/\lambda \\ \lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_8/\lambda \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_4\lambda_6\lambda_8/\lambda \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_6\lambda_8/\lambda \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_6\lambda_7/\lambda \end{bmatrix} \tag{5}$$

ここで，λ は次式で表される．

$$\lambda = \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_6\lambda_8 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_6\lambda_8 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_8 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4\lambda_6\lambda_8 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_6\lambda_8 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_6\lambda_7 \tag{6}$$

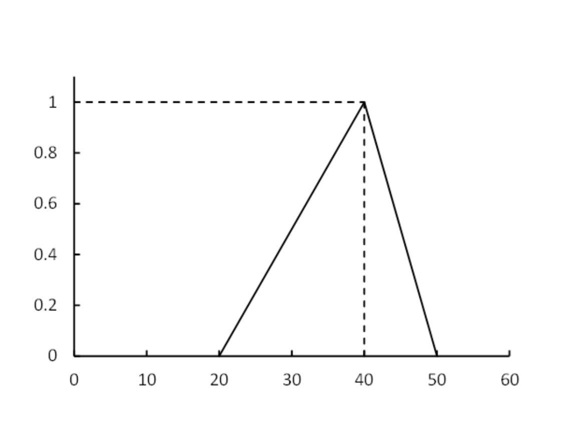
数値例として表 2 の発火率のとき，次の状態確率が得られる．

$$\pi_0 = 0.0322 \quad \pi_1 = 0.2577 \quad \pi_2 = 0.1610$$
$$\pi_3 = 0.0429 \quad \pi_4 = 0.3221 \quad \pi_5 = 0.1840 \tag{7}$$

つぎに，発火率が 3 項対で表される三角型ファジィ数 $\lambda = (a_1, a_2, a_3)$ を仮定する．

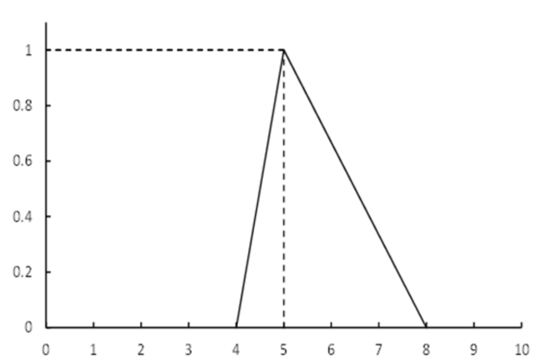
$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = [20,40,50] & \lambda_5 = [0.3,0.5,0.7] \\ \lambda_2 = [4,5,8] & \lambda_6 = [0.6,0.8,1] \\ \lambda_3 = [25,30,40] & \lambda_7 = [0.3,0.4,0.7] \\ \lambda_4 = [2,4,5] & \lambda_8 = [0.5,0.7,0.8] \end{array} \tag{8}$$

代表例として，λ_1 と λ_2 を図 5 (a) と (b))に示し，縦軸は確信レベル α を表す．



$(a)\ \lambda_1 = [20,40,50]$　　λ_1

α



λ_2

$(b)\ \lambda_2 = [4,5,8]$

図 5　三角型ファジィ数

(11)

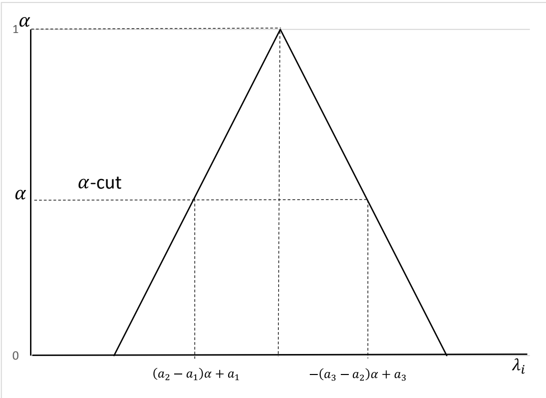


図.6　三角型ファジィ数の α -カット

(8)式の三角型ファジィ数を特徴づける(9)式で表されるレベル α の確信区間である α カットを用いて，生産工程の定常状態の状態確率に適用する．

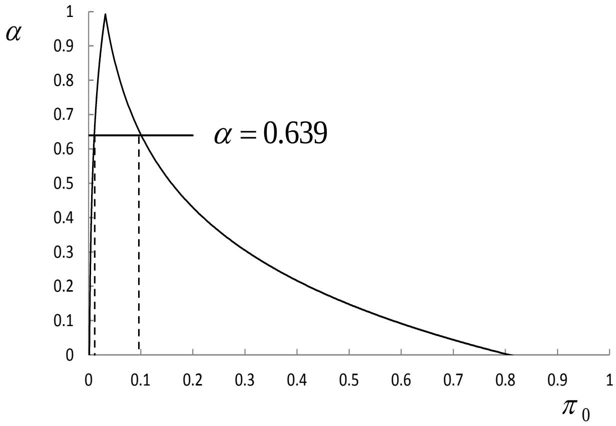
$$\forall\alpha\in[0,1]:\lambda_\alpha=\left[(a_2-a_1)\alpha+a_1,-(a_3-a_2)\alpha+a_3\right] \tag{9}$$

(9)式に(8)式の λ_j の値を代入すると，次に示す α カット確信区間が求められる．

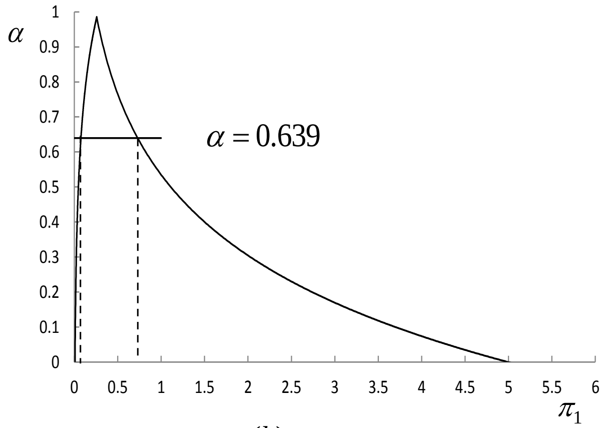
$$\begin{aligned}
\lambda_{1\alpha}&=[20+20\alpha,\ 50-10\alpha]\\
\lambda_{2\alpha}&=[4+\alpha,\ 8-3\alpha]\\
\lambda_{3\alpha}&=[25+5\alpha,\ 40-10\alpha]\\
\lambda_{4\alpha}&=[2+2\alpha,\ 5-\alpha]\\
\lambda_{5\alpha}&=[0.3+0.2\alpha,\ 0.7-0.2\alpha]\\
\lambda_{6\alpha}&=[0.6+0.2\alpha,\ 1-0.2\alpha]\\
\lambda_{7\alpha}&=[0.3+0.1\alpha,\ 0.7-0.3\alpha]\\
\lambda_{8\alpha}&=[0.5+0.2\alpha,\ 0.8-0.1\alpha]
\end{aligned} \tag{10}$$

(10)式の α カット確信区間を(5)式に代入してファジィ状態確率の上限と下限を求めると，次式が得られる．

(11)式で表されるレベル α の確信区間からファジィ状態確率を図示する．代表例として π_0 と π_1 を図 7(a)，(b)に示し，三角型とならないことがわかる．



$(a)\ \pi_0$



$(b)\ \pi_1$

図 7　ファジィ定常状態確率の図的表示

$$\pi_0(\alpha)=\left[\frac{0.4\alpha^5+6.2\alpha^4+36.6\alpha^3+101.8\alpha^2+131\alpha+60}{-29.2\alpha^5+625.2\alpha^4-5333.2\alpha^3+22661.2\alpha^2-47972\alpha+40480},\frac{-0.6\alpha^5+14.8\alpha^4-141.4\alpha^3+655.2\alpha^2-1472\alpha+1280}{24\alpha^5+306.6\alpha^4+1475.8\alpha^3+3391.4\alpha^2+3716.2\alpha+1518}\right]$$

$$\pi_1(\alpha)=\left[\frac{8\alpha^5+100\alpha^4+456\alpha^3+944\alpha^2+880\alpha+300}{-29.2\alpha^5+625.2\alpha^4-5333.2\alpha^3+22661.2\alpha^2-47972\alpha+40480},\frac{-2\alpha^5+54\alpha^4-574\alpha^3+3010\alpha^2-7800\alpha+8000}{24\alpha^5+306.6\alpha^4+1475.8\alpha^3+3391.4\alpha^2+3716.2\alpha+1518}\right]$$

$$\pi_2(\alpha)=\left[\frac{8\alpha^5+88\alpha^4+342\alpha^3+602\alpha^2+490\alpha+150}{-29.2\alpha^5+625.2\alpha^4-5333.2\alpha^3+22661.2\alpha^2-47972\alpha+40480},\frac{-2\alpha^5+51\alpha^4-508\alpha^3+2479\alpha^2-5940\alpha+5600}{24\alpha^5+306.6\alpha^4+1475.8\alpha^3+3391.4\alpha^2+3716.2\alpha+1518}\right]$$

$$\pi_3(\alpha)=\left[\frac{1.6\alpha^5+18.4\alpha^4+79.2\alpha^3+157.6\alpha^2+143.2\alpha+48}{-29.2\alpha^5+625.2\alpha^4-5333.2\alpha^3+22661.2\alpha^2-47972\alpha+40480},\frac{-0.6\alpha^5+15.4\alpha^4-153.8\alpha^3+747\alpha^2-1760\alpha+1600}{24\alpha^5+306.6\alpha^4+1475.8\alpha^3+3391.4\alpha^2+3716.2\alpha+1518}\right]$$

$$\pi_4(\alpha)=\left[\frac{4\alpha^5+62\alpha^4+366\alpha^3+1018\alpha^2+1310\alpha+600}{-29.2\alpha^5+625.2\alpha^4-5333.2\alpha^3+22661.2\alpha^2-47972\alpha+40480},\frac{-6\alpha^5+148\alpha^4-1414\alpha^3+6552\alpha^2-14720\alpha+12800}{24\alpha^5+306.6\alpha^4+1475.8\alpha^3+3391.4\alpha^2+3716.2\alpha+1518}\right]$$

$$\pi_5(\alpha)=\left[\frac{2\alpha^5+32\alpha^4+196\alpha^3+568\alpha^2+762\alpha+360}{-29.2\alpha^5+625.2\alpha^4-5333.2\alpha^3+22661.2\alpha^2-47972\alpha+40480},\frac{-18\alpha^5+342\alpha^4-2542\alpha^3+9218\alpha^2-16280\alpha+11200}{24\alpha^5+306.6\alpha^4+1475.8\alpha^3+3391.4\alpha^2+3716.2\alpha+1518}\right]$$

ファジィ状態確率の上限の値は，π_0 以外の

$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$ は，1 を超えている．したがって，これらのファジィ状態確率の値を区間[0, 1]内になるような最適化問題として定式化を試みたのが Tuysuz らである．

$$
\begin{aligned}
&Min && Z = \alpha \\
&s.t. && \pi_0^+(\alpha) \le 1 \\
& && \pi_1^+(\alpha) \le 1 \\
& && \pi_2^+(\alpha) \le 1 \\
& && \pi_3^+(\alpha) \le 1 \\
& && \pi_4^+(\alpha) \le 1 \\
& && \pi_5^+(\alpha) \le 1 \\
& && 0 \le \alpha \le 1 \\
& && \pi_0^-(\alpha), \pi_1^-(\alpha), \pi_2^-(\alpha), \\
& && \pi_3^-(\alpha), \pi_4^-(\alpha), \pi_5^-(\alpha) \ge 0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

ここで，$\pi_0^+(\alpha), \pi_0^-(\alpha)$ はそれぞれ $\pi_0(\alpha)$ の上限と下限を表す．(11)式を用いて，(12)式を整理すると次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
&Min && Z = \alpha \\
&s.t. && -24.6\alpha^5 - 291.8\alpha^4 - 1617.2\alpha^3 - 2736.2\alpha^2 - 5188.2\alpha - 238 \le 0 \\
& && -26\alpha^5 - 252.6\alpha^4 - 2049.8\alpha^3 - 381.4\alpha^2 - 11516.2\alpha + 6482 \le 0 \\
& && -26\alpha^5 - 255.6\alpha^4 - 1983.8\alpha^3 - 912.4\alpha^2 - 9656.2\alpha + 4082 \le 0 \\
& && -24.6\alpha^5 - 291.2\alpha^4 - 1629.6\alpha^3 - 2644.4\alpha^2 - 5476.2\alpha + 82 \le 0 \\
& && -30\alpha^5 - 158.6\alpha^4 - 2889.8\alpha^3 + 3160.6\alpha^2 - 18436.2\alpha + 11282 \le 0 \\
& && -42\alpha^5 + 35.4\alpha^4 - 4017.8\alpha^3 + 5826.6\alpha^2 - 19996.2\alpha + 9682 \le 0 \\
& && 0 \le \alpha \le 1
\end{aligned}
\tag{13}
$$

(13)式の最適化問題について数式処理ソフト Mathematica の数値的最適化を用いて解くと，α の最小値として 0.639 が得られた．$\alpha = 0.639$ を(11)式に代入して，ファジィ状態確率の上限と下限の値，$\alpha = 1$ の値を表 3 に示す．表 3 より，π_0 と π_1 の場合に上限値と下限値を図 7(a)と(b)に点線で記入した．

表 3 ファジィ定常状態確率の上限と下限

π_i	Lower bound	Upper bound	$\alpha=1$
π_0	0.0110	0.1000	0.0322
π_1	0.0779	0.7170	0.2577
π_2	0.0458	0.4704	0.1610
π_3	0.0128	0.1298	0.0429
π_4	0.1103	1.0000	0.3221
π_5	0.0639	0.6904	0.1840

さらに，発火率 λ_j が 4 項対で表される台形型ファジィ数 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ と表す．この台形型ファジィ数を特徴づける次式のレベル α の確信区間 α カットを用いて，3 の確率ペトリネットを用いてモデル化された生産工程の解析結果に適用する．

$$\forall\alpha \in [0,\ 1] : A_\alpha = \left[(a_2 - a_1)\alpha + a_1,\ -(a_4 - a_3)\alpha + a_4\right] \tag{14}$$

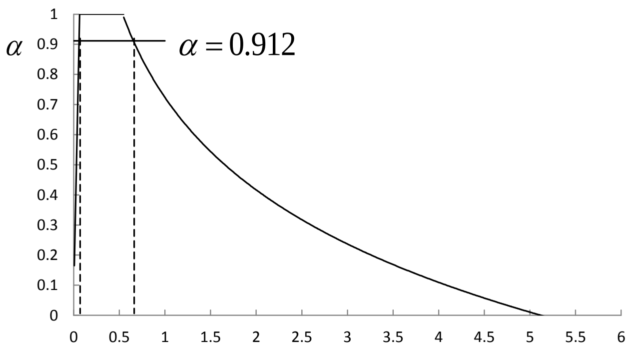
表 2 の各発火率に次の台形型ファジィ数を用いる．

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 = [20,35,40,50] && \lambda_2 = [4,5,6,8] \\
&\lambda_3 = [25,30,35,40] && \lambda_4 = [2,2.5,4,5] \\
&\lambda_5 = [0.3,0.4,0.5,0.7] && \lambda_6 = [0.6,0.8,0.85,1] \\
&\lambda_7 = [0.3,0.4,0.6,0.7] && \lambda_8 = [0.5,0.55,0.7,0.8]
\end{aligned}
\tag{15}
$$

台形型ファジィ数についてレベル α の確信区間 α カットを求めると，次式を得る．

$$\begin{aligned}
\lambda_{1\alpha} &= [20+15\alpha, 50-10\alpha] \\
\lambda_{2\alpha} &= [4+\alpha, 8-2\alpha] \\
\lambda_{3\alpha} &= [25+5\alpha, 40-5\alpha] \\
\lambda_{4\alpha} &= [2+0.5\alpha, 5-\alpha] \\
\lambda_{5\alpha} &= [0.3+0.1\alpha, 0.7-0.2\alpha] \\
\lambda_{6\alpha} &= [0.6+0.2\alpha, 1-0.15\alpha] \\
\lambda_{7\alpha} &= [0.3+0.1\alpha, 0.7-0.1\alpha] \\
\lambda_{8\alpha} &= [0.5+0.05\alpha, 0.8-0.1\alpha]
\end{aligned} \tag{16}$$

(16)式の確信区間 α カットを(15)式に代入して，ファジィ状態確率の上限と下限を求めると，(17)式を得る．



(b) π_1

図 8 ファジィ定常状態確率の図的表示

$$\pi_0(\alpha) = [\frac{0.025\alpha^5 + 0.65\alpha^4 + 6.375\alpha^3 + 29.95\alpha^2 + 68\alpha + 60}{-5.2\alpha^5 + 160.85\alpha^4 - 1961.55\alpha^3 + 11778.9\alpha^2 - 34808\alpha + 40480}, \frac{-0.15\alpha^5 + 4.75\alpha^4 - 59.2\alpha^3 + 362.4\alpha^2 - 1088\alpha + 1280}{2.9125\alpha^5 + 57.45\alpha^4 + 431.9125\alpha^3 + 1533.925\alpha^2 + 2535.8\alpha + 1518}]$$

$$\pi_1(\alpha) = [\frac{0.375\alpha^5 + 8.75\alpha^4 + 73.625\alpha^3 + 282.25\alpha^2 + 490\alpha + 300}{-5.2\alpha^5 + 160.85\alpha^4 - 1961.55\alpha^3 + 11778.9\alpha^2 - 34808\alpha + 40480}, \frac{-0.75\alpha^5 + 24.5\alpha^4 - 316.75\alpha^3 + 2025\alpha^2 - 6400\alpha + 8000}{2.9125\alpha^5 + 57.45\alpha^4 + 431.9125\alpha^3 + 1533.925\alpha^2 + 2535.8\alpha + 1518}]$$

$$\pi_2(\alpha) = [\frac{0.1875\alpha^5 + 4.375\alpha^4 + 36.8125\alpha^3 + 141.125\alpha^2 + 245\alpha + 150}{-5.2\alpha^5 + 160.85\alpha^4 - 1961.55\alpha^3 + 11778.9\alpha^2 - 34808\alpha + 40480}, \frac{-\alpha^5 + 29.5\alpha^4 - 340\alpha^3 + 1911.5\alpha^2 - 5240\alpha + 5600}{2.9125\alpha^5 + 57.45\alpha^4 + 431.9125\alpha^3 + 1533.925\alpha^2 + 2535.8\alpha + 1518}]$$

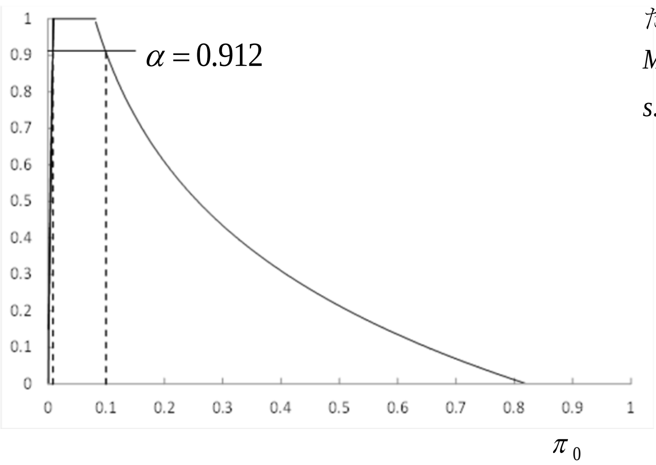
$$\pi_3(\alpha) = [\frac{0.075\alpha^5 + 1.675\alpha^4 + 13.35\alpha^3 + 48.6\alpha_2 + 80.8\alpha + 48}{-5.2\alpha^5 + 160.85\alpha^4 - 1961.55\alpha^3 + 11778.9\alpha^2 - 34808\alpha + 40480}, \frac{-0.3\alpha^5 + 8.6\alpha^4 - 97.1\alpha^3 + 540\alpha^2 - 1480\alpha + 1600}{2.9125\alpha^5 + 57.45\alpha^4 + 431.9125\alpha^3 + 1533.925\alpha^2 + 2535.8\alpha + 1518}]$$

$$\pi_4(\alpha) = [\frac{0.75\alpha^5 + 17.5\alpha^4 + 147.25\alpha^3 + 564.5\alpha^2 + 980\mathrm{x} + 600}{-5.2\alpha^5 + 160.85\alpha^4 - 1961.55\alpha^3 + 11778.9\alpha^2 - 34808\alpha + 40480}, \frac{-1.5\alpha^5 + 47.5\alpha^4 - 592\alpha^3 + 3624\alpha^2 - 10880\alpha + 12800}{2.9125\alpha + 57.45\alpha^4 + 431.9125\alpha^3 + 1533.925\alpha^2 + 2535.8\alpha + 1518}]$$

$$\pi_5(\alpha) = [\frac{1.5\alpha^5 + 24.5\alpha^4 + 154.5\alpha^3 + 467.5\alpha^2 + 672\alpha + 360}{-5.2\alpha^5 + 160.85\alpha^4 - 1961.55\alpha^3 + 11778.9\alpha^2 - 34808\alpha + 40480}, \frac{-1.5\alpha^5 + 46\alpha^4 - 556.5\alpha^3 + 3316\alpha^2 - 9720\alpha + 11200}{2.9125\alpha + 57.45\alpha^4 + 431.9125\alpha^3 + 1533.925\alpha^2 + 2535.8\alpha + 1518}]$$

(17)

(17)式で表されるレベル α の確信区間からファジィ状態確率を図示すると，代表例として π_0 と π_1 は図 8 (a)，(b)となり，台形型とはならないことがわかる．



(a) π_0

ファジィ状態確率の上限の値は，π_0 以外の $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$ は 1 を超えている．したがって，三角形ファジィ数を用いて解析した場合と同様に，本研究でもこれらのファジィ状態確率の値を区間[0, 1]内になるような最適化問題として定式化した．

$$\begin{aligned}
&Min && Z = \alpha \\
&s.t. && \pi_0^+(\alpha) \le 1 \\
& && \pi_1^+(\alpha) \le 1 \\
& && \pi_2^+(\alpha) \le 1 \\
& && \pi_3^+(\alpha) \le 1 \\
& && \pi_4^+(\alpha) \le 1 \\
& && \pi_5^+(\alpha) \le 1 \\
& && 0 \le \alpha \le 1 \\
& && \pi_0^-(\alpha), \pi_1^-(\alpha), \pi_2^-(\alpha), \\
& && \pi_3^-(\alpha), \pi_4^-(\alpha), \pi_5^-(\alpha) \ge 0
\end{aligned} \tag{18}$$

ここで，$\pi_0^+(\alpha), \pi_0^-(\alpha)$ はそれぞれ $\pi_0(\alpha)$ の上限と下限を表す．(17)式を用いて，(18)式を整理すると次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
&Min \quad Z=\alpha \\
&s.t. \quad -24.6\alpha^5-291.8\alpha^4-1617.2\alpha^3-2736.2\alpha^2-5188.2\alpha-238\le 0 \\
&\quad -26\alpha^5-252.6\alpha^4-2049.8\alpha^3-381.4\alpha^2-11516.2\alpha+6482\le 0 \\
&\quad -26\alpha^5-255.6\alpha^4-1983.8\alpha^3-912.4\alpha^2-9656.2\alpha+4082\le 0 \\
&\quad -24.6\alpha^5-291.2\alpha^4-1629.6\alpha^3-2644.4\alpha^2-5476.2\alpha+82\le 0 \\
&\quad -30\alpha^5-158.6\alpha^4-2889.8\alpha^3+3160.6\alpha^2-18436.2\alpha+11282\le 0 \\
&\quad -42\alpha^5+35.4\alpha^4-4017.8\alpha^3+5826.6\alpha^2-19996.2\alpha+9682\le 0 \\
&\quad 0\le\alpha\le 1
\end{aligned}
\tag{19}
$$

(19)式の最適化問題について数式処理ソフト Mathematica の数値的最適化を用いて解くと，α の最小値として 0.912 が得られた．$\alpha=0.912$ を(17)式に代入して，ファジィ状態確率の上限と下限，$\alpha=1$ の値を表 4 に示す．表 4 より，π_0 と π_1 の場合に上限値と下限値を図 8 の(a)と(b)に点線で記入した．

表 4　ファジィ定常状態確率の下限と上限

π_i	Lower bound	Upper bound	$\alpha=1$	
π_0	0.0089	0.1000	0.0105	0.0822
π_1	0.0608	0.6619	0.0738	0.5480
π_2	0.0304	0.3969	0.0369	0.3224
π_3	0.0101	0.1154	0.0123	0.0939
π_4	0.1217	1.0000	0.1477	0.8220
π_5	0.0872	0.8589	0.1074	0.7046

5．結論

本研究は，2 台の機械，2 台のロボットから構成される生産工程のシステムについて，2 台の機械は故障可能とし，故障すると修理されると仮定し，確率ペトリネットを用いてマルコフ連鎖により定常状態のもとで解析した．つぎに，指数分布を仮定した発火率に三角型ファジィ数と本研究での台形型ファジィ数を導入して，レベルの確信区間を用いて，確率ペトリネットから得られた解析結果に適用して定常状態の状態確率を求めた．さらに，三角型ファジィ数の場合と同様に台形型ファジィ数に対して定式化された最適化問題の解を求めることができた．

参考文献

(1) Tuysuz, Kahraman, Modeling a flexible manufacturing cell using stochastic Petri nets with fuzzy parameters, Expert Systems with Applications, 37 (2010) pp.3910-3920.

(2) 田中英夫監訳・松岡浩訳（Kaufmann・Gupta 共著），ファジィ数学モデル，オーム社(1992)pp. 31-35.

原稿提出日　平成 31 年 2 月 22 日