

電磁カスケード理論 A 近似エネルギー流の計算
II. 電子のエネルギー流遷移曲線の計算

新居 誠彦*

A Calculation of Transition Curves for Energy Flow
under Approximation A in Electron-Photon Cascade Theory.
II. Calculation of transition curves for energy flow of electron.

Nobuhiko Nii

Abstract

We calculate the transition curves of energy flow for electron component in cascade shower and the transition curves of average energy for a single electron, under Approximation A in one-dimensional electron-photon cascade theory.

Keywords : One-dimensional electron-photon cascade theory, Energy flow transition curve, Approximation A.

1. はじめに

電子成分の担うエネルギー流 (Energy flow) の遷移曲線 $\Pi_E(E_0, E, t)$ を計算する。この結果と第

I 稿で得た電子数遷移曲線を組み合わせて単位電子のエネルギー流 (電子 1 個の平均エネルギー)

$$e_E(E_0, E, t) = \Pi_E(E_0, E, t) / \Pi(E_0, E, t)$$

を求める。

2. エネルギー流

2.1. エネルギー流遷移曲線の計算

エネルギー $E \sim E + dE$ をもつ電子数は

$\pi(E_0, E, t)dE$, この電子がもつエネルギー流 (微

分型) は $E\pi(E_0, E, t)dE$ である。閾値 E のエネ

$$\text{ルギー流 } \Pi_E(E_0, E, t) = \int_E^{E_0} E\pi(E_0, E, t)dE$$

(積分スペクトル) は, 第 I 稿(2.3.2)を用いて

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, E, t) &= E_0 \times \frac{1}{2\pi i} \int_c \left\{ \left(\frac{E_0}{E} \right)^{s-1} - 1 \right\} \frac{ds}{s-1} \\ &\times \left(H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} + H_2(s) e^{\lambda_2(s)t} \right). \quad (t > 0) \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

第 I 稿 (電子数遷移曲線の計算) § 2.4.2 で述べたように, エネルギー流遷移曲線の計算においても $t=0$ を含めた表式を得るには(2.1.1)の $\{ \}$ に, 入射電子であり且つ親電子である電子 1 個を重ね合わせる必要がある。すなわち,

$$\left\{ \left(E_0/E \right)^{s-1} - 1 \right\} + 1 = \left(E_0/E \right)^{s-1} \text{ として,}$$

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, E, t) &= E_0 \times \frac{1}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{E} \right)^{s-1} \frac{ds}{s-1} \\ &\times \left(H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} + H_2(s) e^{\lambda_2(s)t} \right). \quad (t \geq 0) \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

エイジ s の原点を左へずらして $\text{Re}(s-1) > 0$ ととることができる。1) (2.1.2)の s を $s+1$ に置き換えて $\text{Re}(s) > 0$ とする。

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, E, t) &= E_0 \times \frac{1}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{ds}{s} \\ &\times (H_1(s+1)e^{\lambda_1(s+1)t} + H_2(s+1)e^{\lambda_2(s+1)t}). \\ (t \geq 0) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

深さに対するエネルギー流の変化をみると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Pi_E(E_0, E, t) &= E_0 \times \frac{1}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{ds}{s} \\ &\times (\lambda_1 H_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 H_2 e^{\lambda_2 t}) \Big|_{s+1}. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

常に $\lambda_{1,2}(s+1) < 0$ であるから $\partial \Pi_E / \partial t < 0$ 、すなわちカスケード中のエネルギー流は深さとともに減少していく。これは当然である。カスケードの外からエネルギーの供給は無い。入射エネルギーは深さとともに細分され、そのうちの低い部分は媒質に散逸しカスケードに戻らないからである。

2.2. エネルギー流の遷移曲線

電子数遷移曲線の計算において鞍点法を用いる

とき、 $f(s, t) = \sum H_i(s) e^{\lambda_i(s)t}$ の第 2 項を考慮に入れた。エネルギー流の計算においてもそれと同じ方法を取り入れる。

2.2.1. 鞍点法

(2.1.3) の s -積分を鞍点法で実行する。

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, E, t) &= E_0 \times \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{g(s,t)} ds, \\ g(s, t) &= s \ln \frac{E_0}{E} - \ln s + \ln f(s+1, t), \\ f(s+1, t) &= \sum H_i(s+1) e^{\lambda_i(s+1)t}. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

鞍点 s_2 は次式の解である：

$$g'(s, t) = \ln \frac{E_0}{E} - \frac{1}{s} + \frac{f'(s+1, t)}{f(s+1, t)} = 0. \quad (2.2.2)$$

$$f'(s+1, t) = \sum (H'_i + H_i \lambda'_i t) e^{\lambda_i t} \Big|_{s+1}. \quad (2.2.3)$$

このとき

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, E, t) &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{E_0}{E}\right)^{s_2} \frac{1}{s_2} f(s_2+1, t) \\ &\times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s_2^2} + \left(\frac{f'(s, t)}{f(s, t)}\right)' \Big|_{s=s_2+1}}}. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

2.2.2. $t=0$ と深い領域とにおける表式

$t=0$ および深い領域における表式を検討する。

(1) $t=0$ での表式

(2.2.4) で $t \rightarrow 0$ とする。 $f = H_1 + H_2 = 1, f' = 0,$

$(f'/f)' = 0, s_2 = 1/\ln(E_0/E)$ であるから、

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, E, 0) &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{E_0}{E}\right)^{1/\ln(E_0/E)} \\ &= \frac{e E_0}{\sqrt{2\pi}} \approx 1.1 E_0. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

(第 I 稿, § 4.1 参照)

(2) 深い領域での表式

適当に深い領域(例えば $t \geq 2$) では $\Pi_E(E_0, E, t)$ の表式は電子数の計算の場合と同様に簡単になる。

このような領域では $H_2(s) e^{\lambda_2(s)t} \simeq 0, H'_1(s) \simeq 0,$

$H''_1(s) \simeq 0$ と近似でき、

$$f'(s, t)/f(s, t) = \lambda'_1(s)t,$$

$$(f'(s, t)/f(s, t))' = \lambda''_1(s)t \text{ となる。}$$

よって

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, E, t) &= \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{E_0}{E}\right)^{s_2} \\ &\times \frac{1}{s_2} \frac{H_1(s_2+1) e^{\lambda_1(s_2+1)t}}{\sqrt{\frac{1}{s_2^2} + \lambda''_1(s_2+1)t}}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

鞍点 (エイジ) s_2 は次式の解：

$$\ln \frac{E_0}{E} - \frac{1}{s} + \lambda'_1(s+1)t = 0. \quad (2.2.7)$$

2.3. 単位電子のエネルギー流

エネルギー流 $\Pi_E(E_0, E, t)$ を電子数

$\Pi(E_0, E, t)$ で除した量は単位電子 (電子 1 個) の平均エネルギーである。これをここでは

$e_E(E_0, E, t)$ と記す :

$$\begin{aligned}
 e_E(E_0, E, t) &= \frac{\Pi_E(E_0, E, t)}{\Pi(E_0, E, t)} \\
 &= E_0 \left(\frac{E_0}{E} \right)^{s_2 - s_1} \frac{s_1}{s_2} \\
 &\quad \times \frac{\sum H_i(s_2 + 1) e^{\lambda_i(s_2 + 1)t}}{\sum H_i(s_1) e^{\lambda_i(s_1)t}} \\
 &\quad \times \frac{\sqrt{\frac{1}{s_1^2} + \left(\frac{f'(s, t)}{f(s, t)} \right)' \Big|_{s=s_1}}}{\sqrt{\frac{1}{s_2^2} + \left(\frac{f'(s, t)}{f(s, t)} \right)' \Big|_{s=s_2 + 1}}}. \quad (2.3.1) \quad (t \geq 0)
 \end{aligned}$$

2.4. $t=0$ と深い領域での表式

2.4.1. $t=0$ での表式

われわれは、入射電子の状態を $t < 0$ において $\delta(E - E_0)$ とし、カスケードの発生点を $t = 0$ として定式化した。(2.3.1) はそれを記述しているか、確認する。

(2.3.1) で $t \rightarrow 0$ とすると、

$$e_E(E_0, E, 0) = E_0 \left(\frac{E_0}{E} \right)^{s_1 - s_2}. \quad (2.4.1)$$

さらに(2.2.2) と第 I 稿(3.5)から

$$s_1 = s_2 = 1 / \ln(E_0 / E). \quad (2.4.2)$$

よって

$$e_E(E_0, E, 0) = E_0. \quad (2.4.3)$$

すなわち $\delta(E - E_0)$ 入射が確かめられた。

2.4.2. 深い領域での表式

適当に深い領域 ($t \geq 2$) では $H_2(s) e^{\lambda_2(s)t} \simeq 0$ と

近似でき、かつ $H_1'(s) \simeq 0$, $H_1''(s) \simeq 0$ と見做すことができる。このとき(2.3.1)は、

$$\begin{aligned}
 e_E(E_0, E, t) &= E_0 \left(\frac{E_0}{E} \right)^{s_2 - s_1} \frac{s_1}{s_2} \frac{H_1(s_2 + 1)}{H_1(s_1)} \\
 &\quad \times \sqrt{\frac{\frac{1}{s_1^2} + \lambda_1''(s_1)t}{\frac{1}{s_2^2} + \lambda_1''(s_2 + 1)t}} e^{(\lambda_1(s_2 + 1) - \lambda_1(s_1))t}. \quad (2.4.4)
 \end{aligned}$$

t が大きくなるとエイジ s_1, s_2 は大きくなり

$\lambda_1(s_1) \rightarrow -\sigma_0$, $\lambda_1(s_2 + 1) \rightarrow -\sigma_0$ となるから

$$e^{(\lambda_1(s_2 + 1) - \lambda_1(s_1))t} \rightarrow 1.$$

よって、

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} e_E(E_0, E, t) \\
 &= E_0 \left(\frac{E_0}{E} \right)^{s_2 - s_1} \frac{s_1}{s_2} \frac{H_1(s_2 + 1)}{H_1(s_1)} \sqrt{\frac{\lambda_1''(s_1)}{\lambda_1''(s_2 + 1)}}. \quad (2.4.5)
 \end{aligned}$$

この表式は t を陽に含まない。 t への依存はエイジを通して間接的になるため、深い領域における変化は緩やかになるであろう。エイジは

$$\ln \frac{E_0}{E} - \frac{1}{s_1} + \lambda_1'(s_1)t = 0,$$

$$\ln \frac{E_0}{E} - \frac{1}{s_2} + \lambda_1'(s_2 + 1)t = 0$$

を満たすから、 s_1, s_2 の間に

$$-\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + (\lambda_1'(s_1) - \lambda_1'(s_2 + 1))t = 0$$

の関係がある。任意に大きな t に対してこれが成り

立つためには $\lambda_1'(s_1) - \lambda_1'(s_2 + 1) = 0$, すなわち

$s_1 = s_2 + 1$ が要請される。実際、§ 3.4 図 5 はこの

関係の成立を示す。このとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_E(E_0, E, t) = E_0 \left(\frac{E_0}{E} \right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{s_2} \right),$$

よって、概ね

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_E(E_0, E, t) \simeq E \quad (2.4.6)$$

が成り立つ。つまり十分深い領域に入っていくと単位電子の平均エネルギーは閾値に漸近していく。

3. 各種のグラフ

3.1. エイジ

鞍点法で求めたエイジ $s_2 = s_2(t)$ を図 1-1 に示す。

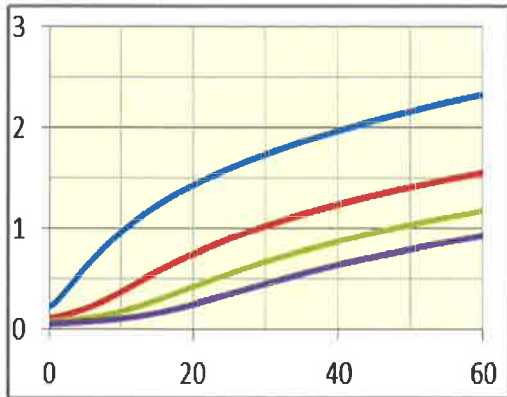


図 1-1. s_2 vs. t

(グラフは上から順に $E_0/E = 10^2, 10^4, 10^6, 10^8$)

$0.01 \leq t \leq 10$ における s_2 の詳しいグラフを図 1-2

に示す。 $t < 1$ でのエイジの立ち上がりは電子数のエイジ(第 I 稿, 図 1-2) に比べて緩やかである。

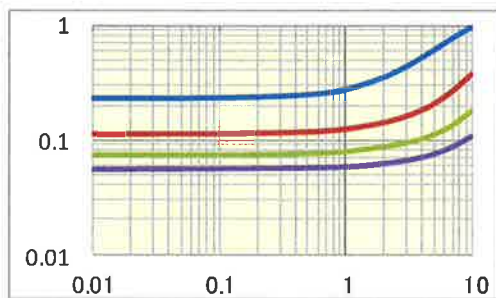


図 1-2. s_2 vs. t

(グラフの順序は図 1-1 と同じ)

3.2. エネルギー流の遷移曲線

エネルギー流を E_0 で規格化した量,

$\Pi_E(E_0, E, t)/E_0$, を図 2 に示す。

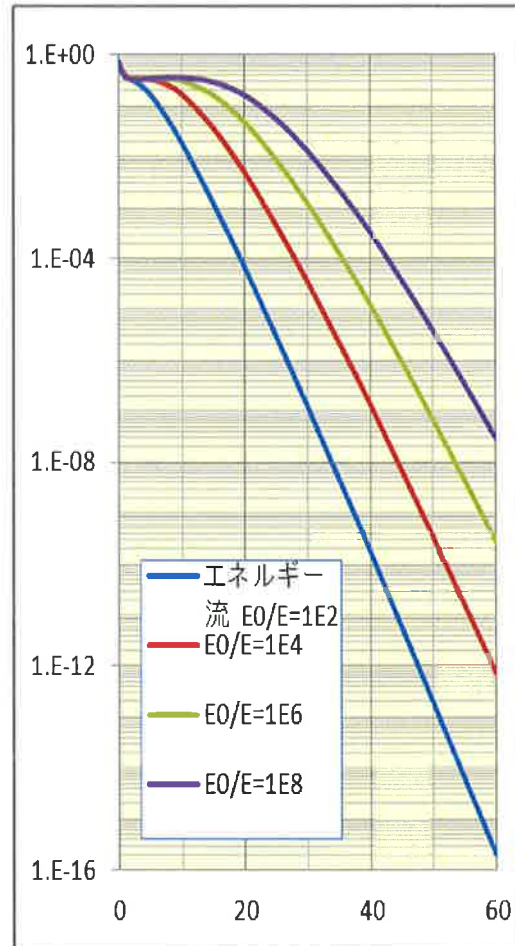


図 2. $\Pi_E(E_0, E, t)/E_0$ vs. t

3.3. 単位電子の平均エネルギー

単位電子の平均エネルギーを E_0 で規格化した

量, $e_E(E_0, E, t)/E_0$, を図 3 に示す。

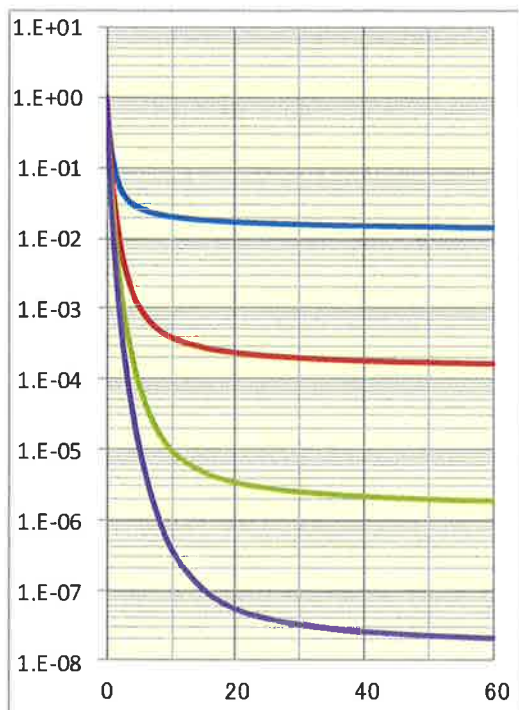


図 3. $e_E(E_0, E, t)/E_0$ vs. t

(グラフの順序は図 1-1 と同じ)

単位電子の平均エネルギーは浅い領域 ($t < 5$) では速やかに減衰していく。深い領域では減衰が緩やかになっていく。

3.4. 3 種の遷移曲線

これまで 3 種類の遷移曲線を得た。電子数 $\Pi(E_0, E, t)$ とエネルギー流 $\Pi_E(E_0, E, t)$, 単位電子のエネルギー $e_E(E_0, E, t)$ である。この 3 種を E_0/E 別・同一図の上に, Π_E と e_E は E_0 で規格化して, 示す。

(1) $E_0/E = 10^2$ の場合の 3 種のグラフ

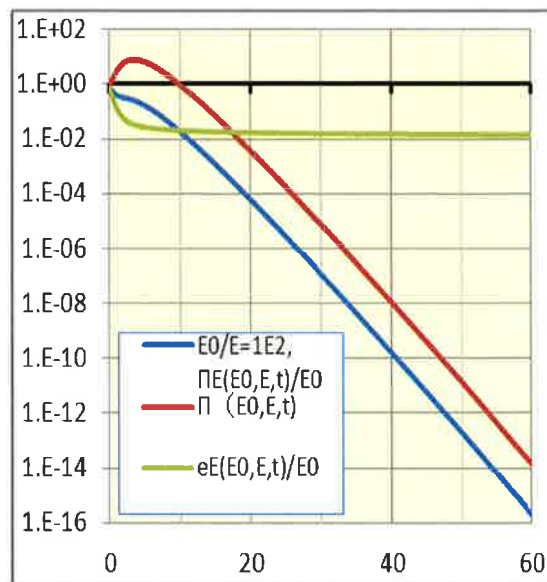


図 4-1. $E_0/E = 10^2$ の 3 種のグラフ

(2) $E_0/E = 10^4$ の場合の 3 種のグラフ

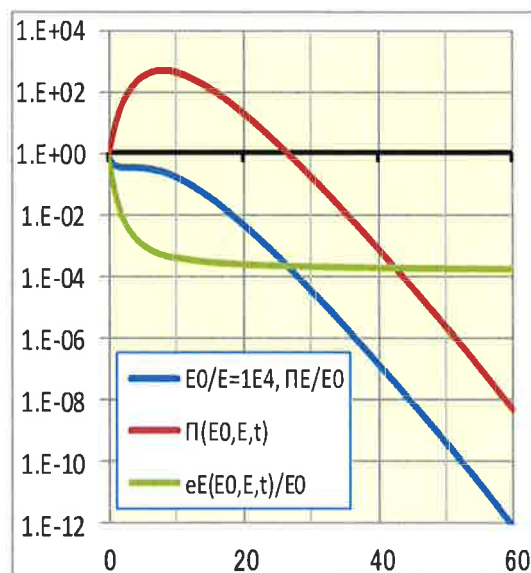


図 4-2. $E_0/E = 10^4$ の 3 種のグラフ

(3) $E_0/E=10^6$ の場合の 3 種のグラフ

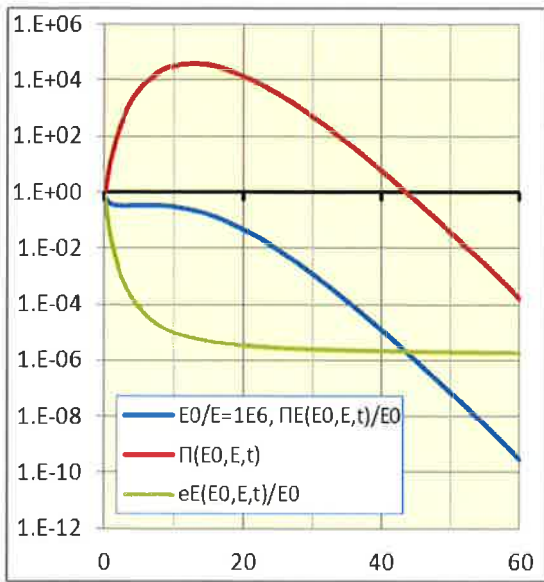


図 4-3. $E_0/E=10^6$ の 3 種のグラフ

(4) $E_0/E=10^8$ の場合の 3 種のグラフ

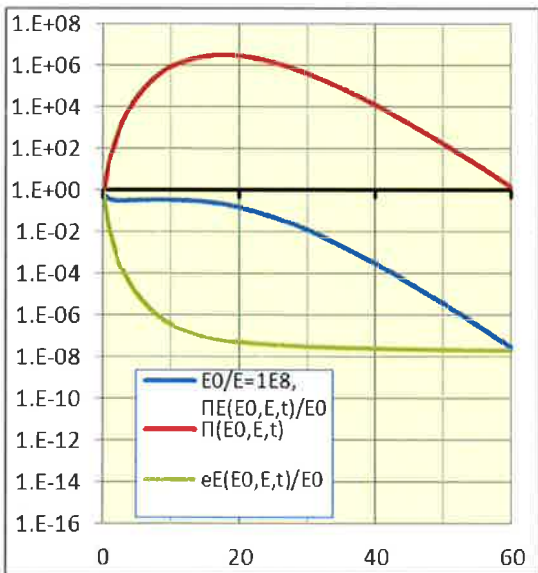


図 4-4. $E_0/E=10^8$ の 3 種のグラフ

4つのケースは次のことを示す。すなわち、 $\Pi(E_0, E, t)$ が最大になる深さ(Optimum thickness) 付近までは $e_E(E_0, E, t)$ は急激に減衰する。

その理由は、この領域で $\Pi(E_0, E, t)$ が急激に増大し、片や $\Pi_E(E_0, E, t)$ は大略停留するからである。

ほぼ停留する原因は対創生によってエネルギーの多くが電子成分へ戻されるためだと考えられる。他方、深さが増すとエイジは大きくなっていき

$\Pi(E_0, E, t)$ と $\Pi_E(E_0, E, t)$ の減衰はともに

$\exp(-\sigma_0 t)$ に近接していくので $e_E(E_0, E, t)$ の減衰は緩くなる。

ところで十分深い領域において $s_1 = s_2 + 1$ の成立が要請された (§ 2.4.2)。図 1-1・1-2 と第 I 稿の図 1-1・1-2 とから、エイジの比 $s_2 + 1 : s_1$ を求めることができる。深さに対する比の変化のようすを図 5 に示す。 $t > 30$ で比はほとんど 1 である。

すなわち(2.4.6)が成り立ち、さらに深い領域で $e_E(E_0, E, t)$ は閾値 E に漸近していく。

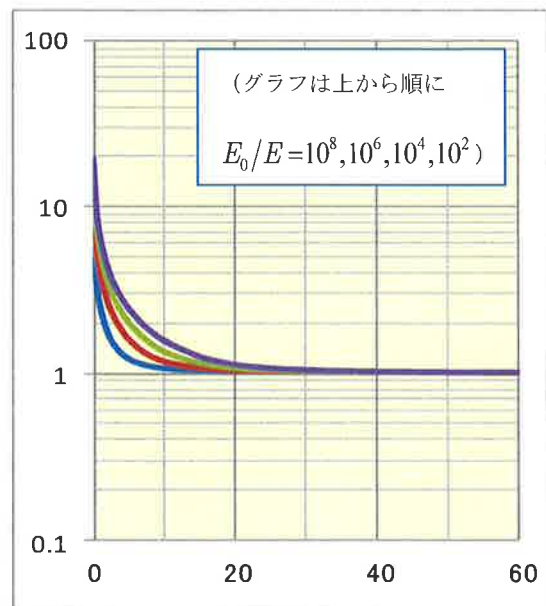


図 5. 比 $(s_2 + 1)/s_1$ vs. t

文献

- 1) H.J.Bhabha, F.R.S. and S.K.Chakrabarty, Proc. London (Ser.A.Math. and Phys.) 181(1943),267.

※ 足利工業大学名誉教授

原稿受付日 平成 30年 1月 1日