

### 3次元電磁カスケード B 近似理論

#### 角分布関数の計算

#### V. エネルギー流角分布関数

新居 誠彦 \*

Calculation of Angular Distribution Function  
in Three Dimensional Electron-Photon Cascade Theory.  
V. Angular Distribution Function of Energy Flow.

NII Nobuhiko

#### Abstract

We evaluate the average energy flow angular distribution function for electron, under Approximation B in the three-dimensional cascade theory.

**Keywords** : three-dimensional cascade theory, angular distribution function of electron , angular distribution function of electron energy flow.

#### 1. はじめに

3次元電磁カスケード B 近似理論における電子角分布関数微分型の表式を第 I 稿で導いた。それを基にエネルギー流角分布関数と平均エネルギー角分布関数の表示式を導く。数値を図表に示す。

#### 2. エネルギー流角分布関数

第 I 稿で得た角分布関数微分型は

$$\begin{aligned} \pi_1(E_0, E, \theta, t) &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_c E_0^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ &\times \frac{2}{E_s^2} \sum_{i=1}^M \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)} \sum_{j=1}^N D_j(s) \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{1}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^{s-1}} e^{-\frac{(E + \varepsilon \beta_j(s))^2 \theta^2}{\alpha_i(s) E_s^2}}. \quad (2.1)$$

係数の  $C_i(s), \alpha_i(s); D_j(s), \beta_j(s)$  は各々、散乱過程、電離損失過程を記述する量

$\sigma_m(s); \rho_n(s)$  を用いて次式を満たすように決定した (第 III 稿 § 3,  $M = N = 4$ )。

$$\sum_{i=1}^M C_i(s) \alpha_i(s)^m = m! \sigma_m(s) / \rho_{2m}(s), \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^N D_j(s) \beta_j(s)^n = n! \rho_n(s). \quad (2.3)$$

2.1. エネルギー流角分布関数

エネルギー流角分布関数  $\Pi_E$  は次式で定義される。

$$\begin{aligned} & \Pi_E(E_0, E, \theta, t) \\ &= \int_E^{E_0} E \pi_1(E_0, E, \theta, t) dE . \end{aligned} \quad (2.4)$$

よって,

$$\begin{aligned} & \Pi_E(E_0, E, \theta, t) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_c^{E_0} E_0^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \frac{2}{E_s^2} \\ & \times \sum_{i=1}^M \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)} \sum_{j=1}^N D_j(s) A_{ij}(s, E_0, E, \theta), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} & A_{ij}(s, E_0, E, \theta) \\ &= \int_E^{E_0} \frac{E dE}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^{s-1}} e^{-\frac{(E + \varepsilon \beta_j(s))^2 \theta^2}{\alpha_i(s) E_s^2}} . \\ & E = (E + \varepsilon \beta_j(s)) - \varepsilon \beta_j(s) \text{ として,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_{ij}(s, E_0, E, \theta) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\theta^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right)^{s/2-3/2} \right. \\ & \times \left\{ \Gamma \left( -\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{(E + \varepsilon \beta_j(s))^2 \theta^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right) \right. \\ & - \Gamma \left( -\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{(E_0 + \varepsilon \beta_j(s))^2 \theta^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right) \left. \right\} \\ & - \varepsilon \beta_j(s) \left( \frac{\theta^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right)^{s/2-1} \\ & \times \left\{ \Gamma \left( -\frac{s}{2} + 1, \frac{(E + \varepsilon \beta_j(s))^2 \theta^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right) \right. \\ & \left. - \Gamma \left( -\frac{s}{2} + 1, \frac{(E_0 + \varepsilon \beta_j(s))^2 \theta^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right) \right\} . \end{aligned} \quad (2.6)$$

$\Pi_E(E_0, E, \theta, t)$  の体積がエネルギー流遷移曲線を与えることは補遺Ⅲに示す。

2.2. エネルギー流 B 近似角分布関数

エネルギー閾値ゼロのエネルギー流 B 近似角分布関数は(2.6)で  $E \rightarrow 0$  とし, かつ  $\varepsilon \ll E_0$  を考慮すれば次のように表される。

$$\begin{aligned} & \Pi_E(E_0, 0, \theta, t) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_c \left( \frac{E_0}{\varepsilon} \right)^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ & \times \frac{\varepsilon^3}{E_s^2} \mathfrak{M}_E(s, E_0, \theta), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \mathfrak{M}_E(s, E_0, \theta) \\ &= \sum_{i=1}^M \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}} \sum_{j=1}^N D_j(s) \\ & \times [\alpha_i(s)]^{1/2} \left( \frac{\varepsilon \theta}{E_s} \right)^{s-3} \\ & \times \left\{ \Gamma \left( -\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{\beta_j^2}{\alpha_i(s)} \left( \frac{\varepsilon \theta}{E_s} \right)^2 \right) \right. \\ & - \Gamma \left( -\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{1}{\alpha_i(s)} \left( \frac{E_0 \theta}{E_s} \right)^2 \right) \left. \right\} \\ & - \beta_j(s) \left( \frac{\varepsilon \theta}{E_s} \right)^{s-2} \\ & \times \left\{ \Gamma \left( -\frac{s}{2} + 1, \frac{\beta_j(s)^2}{\alpha_i(s)} \left( \frac{\varepsilon \theta}{E_s} \right)^2 \right) \right. \\ & \left. - \Gamma \left( -\frac{s}{2} + 1, \frac{1}{\alpha_i(s)} \left( \frac{E_0 \theta}{E_s} \right)^2 \right) \right\} . \end{aligned} \quad (2.8)$$

(2.7) の関数形は, エネルギー流 B 近似ラテラル分布関数<sup>1)</sup>,  $\Pi_E(E_0, 0, r, t)$ ,

において  $r \rightarrow \theta$  と置き換えた式と同形である。異なるのは重畳の係数  $C_i(s)$ ,

$\alpha_i(s)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) の値のみ。それゆえ

関数の形状自体はラテラル分布関数と大きくは変わらないであろう。よってエネルギー流角分布関数の形状はラテラル分布関数の形状変化と同じく,  $\theta \rightarrow$  大とともに一定値  $\rightarrow$  ベキ  $\rightarrow \theta^{-2} e^{-\theta^2}$  へと変化していく。

### 3. 重畳のおもみ

$$(2.8) \text{において } (\varepsilon\theta/E_s)^{s-3}, (\varepsilon\theta/E_s)^{s-2}$$

の項は各々, 次のおもみで重畳される。

$$C_i(s)\alpha_i(s)^{-s/2+1/2} D_j(s) = w_{ij}(s), \quad (3.1)$$

$$C_i(s)\alpha_i(s)^{-s/2} D_j(s)\beta_j(s) = w'_{ij}(s). \quad (3.2)$$

これらは第III稿 §3 に示した数値から求められる (表 1, 表 2)。16 項のうち寄与率の高い方から 6 項で 97% を超える。数値計算はこの 6 項で十分である。

Wij = Cia $\hat{r}^{(-S/2+1/2)} \times Dj$				
	j = 1	2	3	4
S=0.5				
i = 1	0.278121	0.341322	0.075046	0.002093
2	0.127759	0.15679	0.034473	0.000962
3	0.009522	0.011686	0.002569	7.17E-05
4	8.66E-05	0.000106	2.34E-05	6.52E-07
S=1				
	0.27258	0.427955	0.111528	0.003568
	0.058725	0.0922	0.024028	0.000769
	0.002871	0.004508	0.001175	3.76E-05
	1.88E-05	2.95E-05	7.68E-06	2.46E-07
S=1.5				
	0.495634	0.49582	0.092761	0.00225
	0.05228	0.0523	0.009785	0.000237
	0.001769	0.00177	0.000331	8.03E-06
	8.74E-06	8.75E-06	1.64E-06	3.97E-08
S=2				
	0.428658	0.83613	0.244083	0.008444
	0.022569	0.044023	0.012851	0.000445
	0.000542	0.001058	0.000309	1.07E-05
	2.08E-06	4.06E-06	1.18E-06	4.1E-08
S=2.5				
	0.58456	1.206255	0.35869	0.012469
	0.015439	0.031859	0.009474	0.000329
	0.000266	0.000549	0.000163	5.67E-06
	8.02E-07	1.65E-06	4.92E-07	1.71E-08

表 1. おもみ  $w_{ij}$

W'ij = Cia $\hat{r}^{(-S/2)} \times Dj \beta_j$				
	j = 1	2	3	4
S=0.5				
i = 1	0.057414	0.273409	0.130586	0.006541
2	0.008892	0.042344	0.020224	0.001013
3	0.000374	0.001781	0.000851	4.26E-05
4	2.21E-06	1.05E-05	5.03E-06	2.52E-07
S=1				
	0.112807	0.585004	0.310862	0.017185
	0.007618	0.039508	0.020994	0.001161
	0.000206	0.001067	0.000567	3.14E-05
	8.63E-07	4.48E-06	2.38E-06	1.31E-07
S=1.5				
	0.031487	0.137246	0.058621	0.00264
	0.025068	0.109265	0.04667	0.002102
	0.004263	0.01858	0.007936	0.000357
	9.74E-05	0.000425	0.000181	8.17E-06
S=2				
	0.327984	1.751885	0.975291	0.056301
	0.005081	0.02714	0.015109	0.000872
	6.64E-05	0.000354	0.000197	1.14E-05
	1.62E-07	8.65E-07	4.81E-07	2.78E-08
S=2.5				
	0.524196	2.783847	1.544759	0.088755
	0.004003	0.021257	0.011796	0.000678
	3.73E-05	0.000198	0.00011	6.32E-06
	7.14E-08	3.79E-07	2.11E-07	1.21E-08

表 2. おもみ  $w'_{ij}$

### 4. エネルギー流角分布関数の計算

エネルギー流角分布関数, (2.7), は (3.1), (3.2) を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, 0, \theta, t) &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \frac{\varepsilon^3}{E_s^2} \\ &\times \mathfrak{M}_E(s, E_0, \theta), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_E(s, E_0, \theta) &= \sum_i \sum_j [w_{ij}(s) \left(\frac{\varepsilon\theta}{E_s}\right)^{s-3} \\ &\times \left\{ \Gamma\left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{\beta_j^2}{\alpha_i(s)} \left(\frac{\varepsilon\theta}{E_s}\right)^2\right) \right. \\ &\left. - \Gamma\left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{1}{\alpha_i(s)} \left(\frac{E_0\theta}{E_s}\right)^2\right) \right\} \\ &- w'_{ij}(s) \left(\frac{\varepsilon\theta}{E_s}\right)^{s-2} \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \Gamma \left( -\frac{s}{2} + 1, \frac{\beta_j(s)^2}{\alpha_i(s)} \left( \frac{\varepsilon \theta}{E_s} \right)^2 \right) - \Gamma \left( -\frac{s}{2} + 1, \frac{1}{\alpha_i(s)} \left( \frac{E_0 \theta}{E_s} \right)^2 \right) \right\}. \quad (4.2)$$

4.1. 鞍点法

(4.1)の積分を鞍点法で実行する。

$$\Pi_E(E_0, 0, \theta, t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{\varepsilon^3}{E_s^2} \int_c e^{f_E(s)} ds, \quad (4.3)$$

$$f_E(s) = s \ln \frac{E_0}{\varepsilon} + \ln H_1(s) + \lambda_1(s)t + \ln \mathfrak{M}_E(s, E_0, \theta). \quad (4.4)$$

鞍点 (エイジ) は,

$$f'_E(s) = \ln \frac{E_0}{\varepsilon} + \lambda'_1(s)t + \frac{\mathfrak{M}'_E}{\mathfrak{M}_E} = 0 \quad (4.5)$$

の解である ( $s_0$  と記す)。

カスケード理論でよく使われる近似

$$H'_1(s) \approx 0 \text{ をここでも用いる。}$$

$f_E(s)$  を  $s_0$  の近傍で展開する。

$$f_E(s) = f_E(s_0) + \frac{1}{2} f''_E(s_0) (s - s_0)^2.$$

積分路  $c$  を,  $s_0$  を通り虚軸に平行な直

線にとる。  $s = s_0 + i\sigma, (-\infty < \sigma < \infty)$  .

$$\int_c f_E(s) ds = e^{f_E(s_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2 f''_E(s_0)/2} d(i\sigma) = i e^{f_E(s_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{f''_E(s_0)}}. \quad (4.6)$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, 0, \theta, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\varepsilon^3}{E_s^2} \left( \frac{E_0}{\varepsilon} \right)^{s_0} H_1(s_0) e^{\lambda_1(s_0)t} \\ &\times \frac{\mathfrak{M}_E(s_0, E_0, \theta)}{\sqrt{\lambda''_1(s_0)t + (\mathfrak{M}'_E/\mathfrak{M}_E)'|_{s_0}}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

入射エネルギーを  $E_0/\varepsilon = 10^8, 10^6, 10^4,$

$10^3$  の 4 種類とする。深さ  $t$  は各入射エネルギーの電子が創るシャワーの最大発達時の深さ  $T$  (Optimum thickness) とする。

$$t = T = -\frac{1}{\lambda'_1(\bar{s})} \left( \ln \frac{E_0}{\varepsilon} - \frac{1}{\bar{s}} \right) \Big|_{\bar{s}=1}. \quad (4.8)$$

$\mathfrak{M}_E$  の微分は次のように行う。

$$\ln \mathfrak{M}_E = \sum_{k=0}^n a_k s^k, (n=4) \text{ と近似して}$$

$$\mathfrak{M}'_E/\mathfrak{M}_E = \sum_{k=1}^n k a_k s^{k-1}, \quad (4.9)$$

$$(\mathfrak{M}'_E/\mathfrak{M}_E)' = \sum_{k=2}^n k(k-1) a_k s^{k-2}. \quad (4.9)'$$

$\ln \mathfrak{M}_E(s, E_0, \theta); E_0/\varepsilon = 10^3$  の  $s$  依存性

を  $1 \times 10^{-8} \leq \varepsilon \theta / E_s \leq 2 \times 10^0$  の範囲で図 1

に例示する。

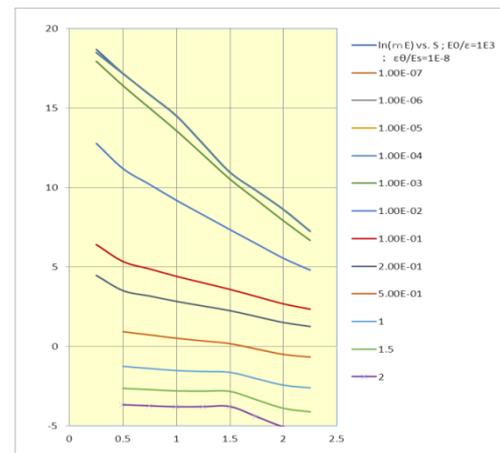


図 1.  $\ln \mathfrak{M}_E$  vs.  $s$ ;  $E_0/\varepsilon = 10^3$

多項式近似が容易な関数形で微分は滑らかである。他の  $E_0/\varepsilon$  についても事情は同じである。

(4.5)から求めたエイジ  $s_0$  を図 2 に示す。

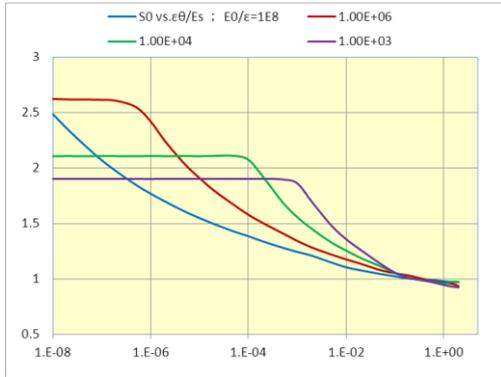


図 2.  $s_0$  vs.  $\varepsilon\theta/E_s$

値の変化に特徴がある： $\varepsilon\theta/E_s \rightarrow$  大とともに一定  $\rightarrow$  急減  $\rightarrow$  収束  $\rightarrow$  微拡張へと変化する。

収束値は  $s_0 \simeq 1$  ( $\varepsilon\theta/E_s \simeq 0.2$ )。

#### 4.2. エネルギー流角分布関数

電子エネルギー流角分布関数；

$$\begin{aligned} & \Pi_E(E_0, 0, \theta, T) / (\varepsilon^3 / E_s^2) \\ &= \frac{(E_0/\varepsilon)^{s_0} H_1(s_0) e^{\lambda_1(s_0)T} \mathfrak{M}_E(s_0, E_0, \theta)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{\lambda_1''(s_0)T + (\mathfrak{M}'_E/\mathfrak{M}_E)'|_{s_0}}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

のグラフを図 3 に、数値を補遺 I に示す。 $\mathfrak{M}_E$  中の不完全ガンマ関数の数値は文献 2) に依る。

分布関数の直接の比較には規格化関数；

$$\int_0^\infty \tilde{\Pi}_E(E_0, 0, \theta, T) 2\pi \frac{\varepsilon\theta}{E_s} d\left(\frac{\varepsilon\theta}{E_s}\right) = 1$$

の比較が適切である。図 4 に示す。

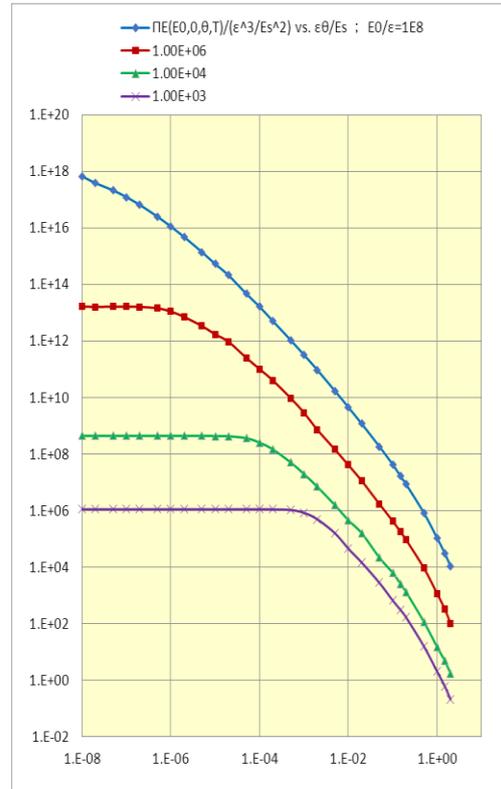


図 3.  $\Pi_E(E_0, 0, \theta, T) / (\varepsilon^3 / E_s^2)$  vs.  $\varepsilon\theta/E_s$



図 4. 規格化した  $\tilde{\Pi}_E(E_0, 0, \theta, T)$

いくつかの特徴がある：

(i) 平坦な領域は  $E_0/\varepsilon \rightarrow$  小とともに  
 広がる。

(ii) ベキは入射エネルギーに依らず  
 ほぼ  $-1.89$ 。

(iii)  $10^{-1} \lesssim \varepsilon\theta/E_s$  の領域で減少率はベ

キよりも大きくなる。

(iv) 電子エネルギー流ラテラル分布関  
 数に現れた電子数過多 (凸) 1) はエネ  
 ルギー流角分布関数に存在しない。

**5. 電子平均エネルギー角分布関数**

カスケードシャワーの中に円錐環 (二  
 層から成る円錐を輪切りにしてできる  
 環) を考える。内側の頂角を  $\theta$ ，外側の  
 頂角を  $\theta+d\theta$ ，環の高さを  $dt$  とする。  
 この円錐環に含まれる，エネルギー量は

$$\Pi_E(E_0, E, \theta, t) 2\pi\theta d\theta dt, \text{ 電子数は}$$

$$\Pi_1(E_0, E, \theta, t) 2\pi\theta d\theta dt \text{ である。}$$

前者を後者で除した量は単位電子のも  
 つエネルギー (平均エネルギー) である。

これを  $e_E(E_0, E, \theta, t)$  と記す：

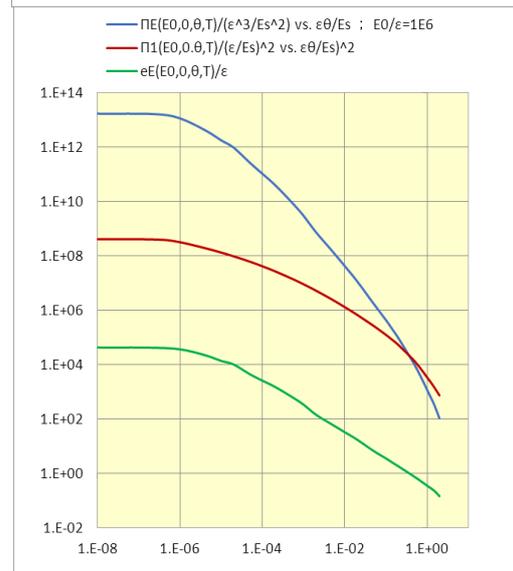
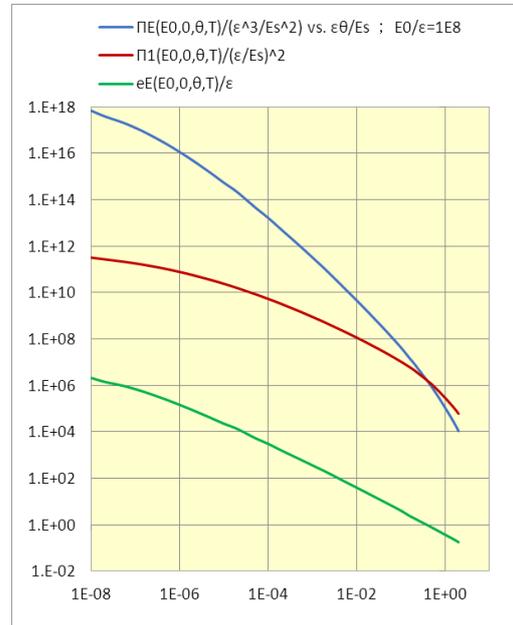
$$e_E(E_0, E, \theta, t) = \frac{\Pi_E(E_0, E, \theta, t)}{\Pi_1(E_0, E, \theta, t)} \quad (5.1)$$

エネルギー閾値を  $E = 0$ ，媒質の深さを  
 $t = T$  (Optimum thickness) とする。  
 このとき平均エネルギー角分布関数は，

$$e_E(E_0, 0, \theta, T) = \varepsilon \left( \frac{E_0}{\varepsilon} \right)^{s_0 - s_1} \times \frac{H_1(s_0)}{H_1(s_1)} \frac{\mathfrak{M}_1(s_0, E_0, \theta)}{\mathfrak{M}_E(s_1, E_0, \theta)} e^{(\lambda_1(s_0) - \lambda_1(s_1))T} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\lambda_1''(s_1)T + (\mathfrak{M}'_1/\mathfrak{M}_1)'|_{s_0}}{\lambda_1''(s_0)T + (\mathfrak{M}'_E/\mathfrak{M}_E)'|_{s_1}}} \quad (5.2)$$

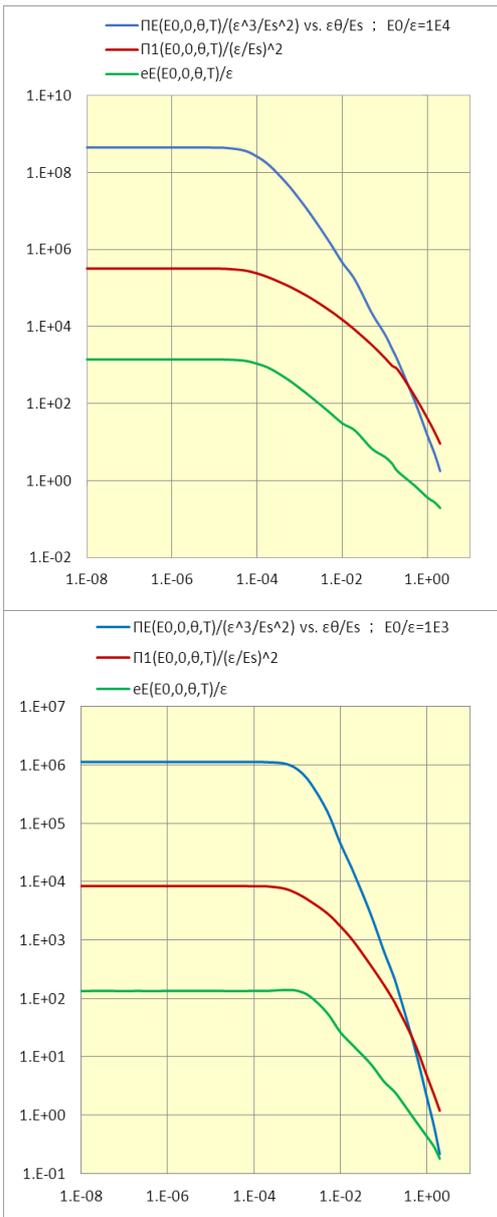
入射エネルギー別に(5.2)を他の 2 つの  
 分布関数とともに図 5-1~5.4 に示す。  
 数値は補遺 II に示す。



3 種の分布関数 ; 緑  $e_E/\varepsilon$  ,  
 青  $\Pi_E/(\varepsilon^3/E_s^2)$  , 茶  $\Pi_1/(\varepsilon/E_s)^2$

図 5-1(上)  $E_0/\varepsilon = 10^8$

図 5-2(下)  $E_0/\varepsilon = 10^6$



3種の分布関数 ; 緑  $e_E/\epsilon$ ,  
 青  $\Pi_E/(\epsilon^3/E_s^2)$ , 茶  $\Pi_1/(\epsilon^2/E_s^2)$   
 図 5-3 (上  $E_0/\epsilon = 10^4$ )  
 図 5-4 (下  $E_0/\epsilon = 10^3$ )

4つの  $e_E(E_0, 0, \theta, T)/\epsilon$  を一つにまとめて図 6 に示す。

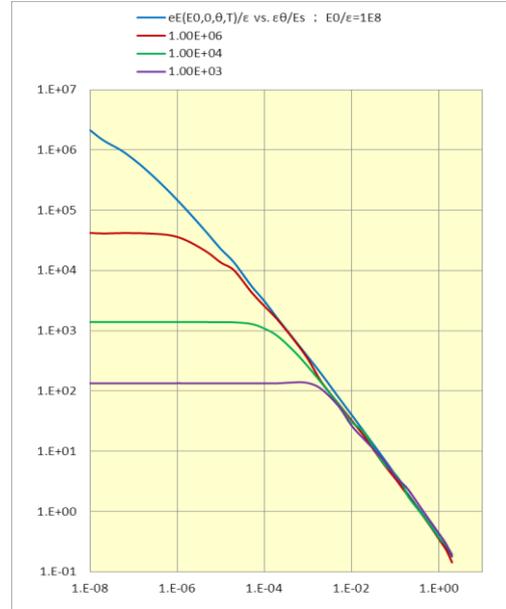


図 6  $e_E(E_0, 0, \theta, T)/\epsilon$  vs.  $\epsilon\theta/E_s$

ベキ領域ではほぼ  $-0.96$  のベキをもつ。

参考文献

- 1) 新居誠彦, 足利大学研究集録第 57 号 (2022.3), 7.
- 2) <https://keisan.casio.jp/exec/system/1161228685>

補遺

B 近似電子エネルギー流角分布関数および電子平均エネルギー角分布関数の数値を補遺 I および補遺 II に示す。

補遺 III で, 電子エネルギー流角分布関数の体積が電子エネルギー流遷移曲線を与えることを確認する。

補遺 I. B 近似電子エネルギー流角分布関数

$E\theta / E_s$	1.00E+08	1.00E+06	1.00E+04	1.00E+03
1E-08	6.8208E+17	1.6693E+13	445984240	1126883.6
2E-08	3.9212E+17	1.6347E+13	446035503	1128045.8
5E-08	2.1677E+17	1.6579E+13	445980668	1128045.8
1E-07	1.2493E+17	1.6494E+13	446838897	1126770.8
2E-07	6.6021E+16	1.6219E+13	446095510	1128045.8
5E-07	2.5336E+16	1.4566E+13	445880632	1126845.9
1E-06	1.1371E+16	1.1198E+13	446729143	1132265.9
2E-06	4.8184E+15	7.1784E+12	445829150	1128158.6
5E-06	1.429E+15	3.445E+12	445045917	1129557.1
1E-05	5.3975E+14	1.7497E+12	442167962	1129568.2
2E-05	2.1333E+14	9.4893E+11	431904519	1128043.9
5E-05	4.8052E+13	2.5996E+11	370706410	1125605
1E-04	1.6517E+13	1.0318E+11	258492001	1126038.9
2E-04	5.1308E+12	4.0619E+10	147954185	1116564.8
5E-04	1.0912E+12	9713229743	51559812.6	1062664.5
1E-03	3.2808E+11	2957352939	19994412.3	849275.29
2E-03	9.5839E+10	736315520	7039417.28	499356.83
5E-03	1.7236E+10	146436729	1569945.46	160179.59
1E-02	4599527688	41665987.2	462363.302	45632.452
2E-02	1191865875	11454570.2	161449.968	14734.574
5E-02	187964618	1743999.96	22054.0739	2825.2188
1E-01	43295728	430689.568	6385.8124	670.7814
1.5E-01	16592002.2	179063.704	2580.87995	309.69847
2E-01	8597409.23	93919.0849	1334.61871	169.34106
5E-01	853943.309	9542.19942	119.39561	16.332012
1	108582.455	1177.55191	15.2238851	2.0685076
1.5	30169.7497	321.946331	4.79345813	0.6051326
2	10994.1899	103.225208	1.77038128	0.2136349

補遺 II. 電子平均エネルギー角分布関数

$\epsilon \theta / E_s$	1.00E+08	1.00E+06	1.00E+04	1.00E+03
1E-08	2114295	41895.57	1392.085	133.7749
2E-08	1437037	41043.3	1393.269	133.9128
5E-08	993004.2	41608.97	1392.498	133.9128
1E-07	691389.7	41542.78	1395.676	133.7615
2E-07	454362.9	41075.96	1392.84	133.9441
5E-07	243629.3	39449.04	1392.866	133.7024
1E-06	146034.1	35928.18	1395.185	134.4304
2E-06	85228.59	29135.36	1391.833	133.9577
5E-06	40362.66	19802.55	1391.411	134.0124
1E-05	22489.26	13451.37	1388.554	134.1403
2E-05	13496.75	10002.79	1380.048	133.8616
5E-05	5512.946	4347.311	1296.508	133.7477
1E-04	3068.804	2536.232	1081.907	134.2317
2E-04	1583.837	1511.946	811.2242	134.1465
5E-04	687.3687	663.6928	438.9952	139.0869
1E-03	364.2596	333.384	250.9516	135.3369
2E-03	192.109	142.1034	137.2264	107.8015
5E-03	78.20319	60.84387	59.37071	55.8914
1E-02	39.86018	32.33542	30.6887	26.39144
2E-02	20.2479	17.17908	19.83628	15.3575
5E-02	8.179539	6.624346	6.687958	7.587214
1E-01	4.064298	3.506724	4.141462	3.837087
1.5E-01	2.534783	2.363573	2.725124	2.865609
2E-01	1.894743	1.798097	1.740819	2.284882
5E-01	0.765132	0.730675	0.745732	0.879664
1	0.373755	0.349118	0.36587	0.432748
1.5	0.246192	0.224828	0.269852	0.281101
2	0.179216	0.142882	0.194449	0.179401

補遺 III. 電子エネルギー流角分布関数の体積が電子エネルギー流遷移曲線を与えることの確認

$$\int_0^\infty \Pi_E(E_0, E, \theta, t) 2\pi\theta d\theta = V_E(E_0, E, t)$$

とおく。

$$\int_0^\infty x^\mu \Gamma(\nu, x) dx = \frac{(\mu + \nu)!}{\mu + 1} \quad \text{および}$$

恒等式  $\sum_{i=1}^N C_i(s) = 1$  を用いると、

$$V_E(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c E_0^s ds H_1(s) e^{\lambda(s)t} \times \sum_{j=1}^M D_j(s) \times \left[ \frac{1}{s-1} \left\{ \frac{1}{(E + \epsilon\beta_j(s))^{s-1}} - \frac{1}{(E_0 + \epsilon\beta_j(s))^{s-1}} \right\} - \frac{\epsilon\beta_j(s)}{s} \left\{ \frac{1}{(E + \epsilon\beta_j(s))^s} - \frac{1}{(E_0 + \epsilon\beta_j(s))^s} \right\} \right] \quad (A1)$$

他方、遷移曲線の微分型は  $H_1$ )

$$\pi(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \left( \frac{E_0}{E} \right)^s \frac{ds}{E} H_1(s) e^{\lambda(s)t} \times \sum_{n=0}^\infty \frac{(s+n)!}{s!} \left( -\frac{\epsilon}{E} \right)^n \rho_n(s) \quad (A2)$$

Prony 内挿法の手法を用いて

$$n! \rho_n(s) = \sum_{j=1}^N D_j(s) \beta_j(s)^n \quad (A3)$$

と表す。  $2N$  々の  $D_j(s), \beta_j(s)$

( $j = 1, \dots, N$ ) は  $2N$  々の既知数  $\rho_n(s)$

( $n = 0, 1, \dots, 2N-1$ ) から一意的に定まる。

(4.2) の級数和を  $S$  と表す。

$$S = \sum_{j=1}^N D_j(s) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n}{n} \left( -\frac{\varepsilon \beta_j(s)}{E} \right)^n.$$

$n$ に関する和は  $\varepsilon \beta_j(s)/E < 1$  なら存在する。この条件を満たすように  $E$  を大きくとると、

$$S = \sum_{j=1}^N \frac{D_j(s)}{(1 + \varepsilon \beta_j(s)/E)^{s+1}}.$$

分母の中の分数は(A2)の級数和の左側にある  $E^{-s-1}$  と相俟って分母と分子が分離する。ここで上の条件は不要となり以降で極限 ( $E \rightarrow 0$ ) が可能となる。

$$\begin{aligned} \pi(E_0, E, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c E_0^s ds H_1(s) e^{\lambda(s)t} \\ &\times \sum_{j=1}^N \frac{D_j(s)}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^{s+1}}. \end{aligned}$$

エネルギー一流遷移曲線は、

$$\Pi_E(E_0, E, t) = \int_E^{E_0} E \pi(E_0, E, t) dE.$$

$$E = (E + \varepsilon \beta_j(s)) - \varepsilon \beta_j(s) \text{ として,}$$

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, E, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c E_0^s ds H_1(s) e^{\lambda(s)t} \sum_{j=1}^N D_j(s) \\ &\times \left[ \frac{1}{s-1} \left\{ \frac{1}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^{s-1}} - \frac{1}{(E_0 + \varepsilon \beta_j(s))^{s-1}} \right\} \right. \\ &\left. - \frac{\varepsilon \beta_j(s)}{s} \left\{ \frac{1}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^s} - \frac{1}{(E_0 + \varepsilon \beta_j(s))^s} \right\} \right]. \end{aligned} \tag{A3}$$

(A1), (A3)から

$$V_E(E_0, E, t) = \Pi_E(E_0, E, t).$$

エネルギー一流角分布関数の体積はエネルギー一流遷移曲線を与えることが確認された。

次に遷移曲線 A, B 近似の表式を導く。

### III.1. エネルギー一流 A 近似遷移曲線

(A1)において  $\varepsilon = 0$  とみなす。恒等式

$$\sum_{j=1}^N D_j(s) = 1 \text{ を用いると,}$$

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, E, t)/E &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \left( \frac{E_0}{E} \right)^s \frac{ds}{s-1} H_1(s) e^{\lambda(s)t} \\ &\times \left[ 1 - \left( \frac{E}{E_0} \right)^{s-1} \right]. \end{aligned}$$

あるいは、 $s \rightarrow s+1$  と置き換え <sup>H2)</sup>

さらに  $E/E_0 \ll 1$  を考慮すると、

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, E, t)/E_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \left( \frac{E_0}{E} \right)^s \frac{ds}{s} H_1(s+1) e^{\lambda(s+1)t}. \end{aligned} \tag{A4}$$

### III.2. エネルギー一流 B 近似遷移曲線

#### III.2.1. 遷移曲線

(A.3)で  $E \rightarrow 0$  とする。

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, 0, t)/\varepsilon &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \left( \frac{E_0}{\varepsilon} \right)^s ds H_1(s) e^{\lambda(s)t} \\ &\times \sum_{j=1}^N D_j(s) \beta_j(s)^{-s+1} \\ &\times \left[ \frac{1}{s-1} \left\{ 1 - \left( \frac{\varepsilon \beta_j(s)}{E_0} \right)^{s-1} \right\} - \frac{1}{s} \left\{ 1 - \left( \frac{\varepsilon \beta_j(s)}{E_0} \right)^s \right\} \right]. \end{aligned}$$

または、 $s \rightarrow s+1$  と置き換え、さらに  $\varepsilon/E_0 \ll 1$  を考慮すると、

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, 0, t)/E_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \left( \frac{E_0}{\varepsilon} \right)^s \frac{ds}{s(s+1)} \\ &\times H_1(s+1) e^{\lambda(s+1)t} K_1(s+1, -s). \end{aligned}$$

ただし

$$\sum_{j=1}^N D_j (s+1) \beta_j (s+1)^{-s} = K_1 (s+1, -s)$$

は Rossi-Greisen の  $K$  関数。H3)

次節に  $K_1 (s+1, -s)$  の値を与える。

### III.2.2. $K_1 (s+1, -s)$ 関数

$K_1 (s+1, -s)$  は  $\sum_{j=1}^N D_j (s+1) \beta_j (s+1)^n$  に

おいて  $n$  を  $-s$  へ外挿すれば原理的には値が求められる。しかし Prony 内挿法が必ずしも外挿に適するとは限らない (第 I 稿補遺 II)。そこで、第 I 稿補遺 II で行ったのと同じく、 $K_1 (n+1, -n)$

の補間から  $K_1 (s+1, -s)$  を求める。

まず、 $K (s, r)$  は  $r$  を整数とする漸化式から導くことができる。H3)

$$K_1 (s, 0) = 1,$$

$$K_1 (2, -1) = 1.2854983,$$

$$K_1 (3, -2) = 1.6370306,$$

$$K_1 (4, -3) = 2.1866268.$$

※ 足利大学名誉教授

次に、これらを補間して  $K_1 (s+1, -s)$  を

求める。Prony 内挿法の手法を用いて、

$$((n+1)!)^2 K_1 (n+1, -n) = \sum_{k=1}^4 C_k \alpha_k^n$$

と表す。 $C_k, \alpha_k$  は表のように求められる。

C1	0.797440507	$\alpha$ 1	2.604518117
C2	0.194568699	$\alpha$ 2	13.94230039
C3	0.007951093	$\alpha$ 3	43.76473799
C4	3.97011E-05	$\alpha$ 4	109.12149429

補間値は  $0 \leq s \leq 3$  の範囲で

$$K_1 (s+1, -s) = \sum_{k=1}^4 C_k \alpha_k^s / \Gamma^2 (s+2).$$

#### 補遺における参考文献

H1) J.Nishimura, Handbuch der Physik, **XLVI/2**(1967),1.

H2) J.Bhabha, F.R.S.Chakrabarty, Proc.London(Ser.A,Math.And Phys.)**181**(1943).

H3) B.Rossi and K.Greisen, *Cosmic-Ray Theory*, Rev.Mod.Phys. **13**(1941),240.

原稿受付日 令和 5 年 1 月 1 日