3次元電磁カスケードB近似理論角分布関数の計算

Ⅳ. 角分布関数の数値計算

新 居 誠 彦 ※

Calculation of Angular Distribution Function
in Three Dimensional Electron-Photon Cascade Theory.
Ⅳ. Numerical Evaluation of Angular Distribution Function

NII Nobuhiko

Abstract

We evaluate both the electron angular distribution function, under Approximation B in the three-dimensional cascade theory.

Keywords **:** *three-dimensional cascade theory, Approximation B, electron angular distribution function.*

1. はじめに

3次元電磁カスケードB近似理論における電子角分布関数積分形の表示式を第I稿で導いた。
本稿（第Ⅳ稿）でエネルギー閾値 E がゼロの分布関数の数値を求め結果を図表に示す。

2. 角分布関数

第I稿で得た角分布関数積分型；

$$\Pi_1\left(E_0,E,\theta,t\right)$$
$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c\left(\frac{E_0\theta}{E_s}\right)^s\frac{ds}{\theta^2}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}}\sum_{j=1}^{N}D_j(s)\times$$
$$\times\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2\theta^2}{\alpha_i(s)E_s^{\,2}}\right)$$
$$-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{\left(E_0+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2\theta^2}{\alpha_i(s)E_s^{\,2}}\right)\}\quad(2.1)$$

は，$0\leqq E\leqq E_0$ のエネルギー範囲を記述する。よって A近似式とB近似式を含む。

2.1.　B近似式

(2.1)で $E\rightarrow 0$ とし，かつ，$\varepsilon\ll E_0$ を考慮するとB近似式は次のように表される。

$$\varPi_1(E_0,0,\theta,t)$$
$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s ds\,H_1(s)\,\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\left(\frac{\varepsilon}{E_s}\right)^2\mathfrak{M}_1(s,E_0,\theta),\qquad(2.2)$$

$$\mathfrak{M}_1(s,E_0,\theta)$$
$$=\left(\frac{\varepsilon\theta}{E_s}\right)^{s-2}\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}}\sum_{j=1}^{N}D_j(s)$$
$$\times\{\varGamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{\beta_j(s)^2}{\alpha_i(s)}\left(\frac{\varepsilon\theta}{E_s}\right)^2\right)$$
$$-\varGamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{1}{\alpha_i(s)}\left(\frac{E_0\theta}{E_s}\right)^2\right)\}.\qquad(2.3)$$

2.2. 角分布関数の形状

(2.3)の 2 つの不完全ガンマ関数の差を

$\varDelta(-s/2+1,\theta)$ と表す。

分布関数の θ 依存は,

$\varPi_1(\theta)\sim\theta^{s-2}\varDelta(-s/2+1,\theta)$.

$\theta\to 0$，中間，$\theta\to\infty$ について依存性を検討する。

(i) $\theta\to 0$

$\varGamma(\alpha,x)=\varGamma(\alpha)-x^{\alpha}/\alpha,\ (x\to 0)$

であるから $\varDelta(-s/2+1,\theta)\sim\dfrac{\theta^{-s+2}}{-s/2+1}$.

$$\varPi_1(\theta\to 0)$$
$$\sim\frac{(E_0/E_s)^{-s+2}-(\varepsilon\beta_j(s)/E_s)^{-s+2}}{-s+2}.$$

とくに $s\to 2$ で

$$\varPi_1(\theta\to 0)\sim\ln\frac{E_0}{\varepsilon\beta_j(s)}.$$

ともに有界である。

(ii) 中間領域

$\theta\to 0$，$\theta\to\infty$ で $\varDelta(-s/2+1,\theta)\to 0$

だから $\varDelta(-s/2+1,\theta)$ は上に凸の関数。

よって頂点の近傍で略一定。この範囲では $\varPi_1(\theta)\sim\theta^{s-2}$. 略ベキで表される。

(iii) $\theta\to\infty$

$\varGamma(\alpha,x)\to x^{\alpha-1}\,\mathrm{e}^{-x},\ (x\to\infty)$ だから

$$\varPi_1(\theta\to\infty)\sim\theta^{-2}\,\mathrm{e}^{-\theta^2}.$$

ガウス型より速く減少する。

以上から分布関数の形状は, 一定値→ベキ $\theta^{s-2}\to\theta^{-2}\,\mathrm{e}^{-\theta^2}$ へと変化していく。

3. 数值計算

$\varPi_1(E_0,0,\theta,t)$ の値を求める。入射エネルギーは $E_0/\varepsilon=10^8,10^6,10^4,10^3$ の 4 種類，角の範囲は $\varepsilon\theta/E_s=1\times10^{-8}\sim 2\times10^{0}$, 深さ t は各入射エネルギーが創るシャワーの最大発達の深さ T（Optimum thickness）[2)]

$$t=T=-\frac{1}{\lambda_1'(\bar{s})}\left(\ln\frac{E_0}{\varepsilon}-\frac{1}{\bar{s}}\right)\Big|_{\bar{s}=1}$$

とする。

3.1. 鞍点法

(2.2)の s 積分を鞍点法で実行する。
被積分関数の対数をとり，

$$f_1(s)=s\ln\frac{E_0}{\varepsilon}+\ln H_1(s)+\lambda_1(s)t$$
$$+\ln\mathfrak{M}_1(s,E_0,\theta) \qquad (3.2)$$

と表す。

$$f_1'(s)=\ln\frac{E_0}{\varepsilon}+\lambda_1'(s)t+\frac{\mathfrak{M}_1'}{\mathfrak{M}_1}=0 \qquad (3.3)$$

の解が鞍点（エイジ）である（$H_1(s)$の変化は他の量に比べて緩いため$H_1'(s)\approx 0$とみなす)。鞍点を s_1 と記しこの点の近傍で $f_1(s)$ を展開する。

$$f_1(s)=f_1(s_1)+\frac{1}{2}f_1''(s_1)(s-s_1)^2.$$

積分路 c を，s_1 を通り虚軸に平行な直線にとる：$s=s_1+i\sigma,(-\infty<\sigma<\infty)$.

$$\Pi_1(E_0,0,\theta,t)$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\varepsilon}{E_s}\right)^2 \mathrm{e}^{f_1(s_1)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}f_1''(s_1)\sigma^2}d\sigma$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{\varepsilon}{E_s}\right)^2 \mathrm{e}^{f_1(s_1)}\sqrt{\frac{2\pi}{f_1''(s_1)}}$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(\frac{\varepsilon}{E_s}\right)^2\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^{s_1}\mathrm{e}^{\lambda_1(s_1)t}$$
$$\times\frac{\mathfrak{M}_1(s_1,E_0,\theta)}{\sqrt{\lambda_1''(s_1)t+(\mathfrak{M}_1'/\mathfrak{M}_1)'|_{s_1}}}. \qquad (3.4)$$

(2.3)の不完全ガンマ関数の数値は文献 1)に依る。

3.2. 重畳のおもみ

関数$\mathfrak{M}_1(s,E_0,\theta)$は不完全ガンマ関数が，おもみ

$$w_{ij}(s)=C_i(s)\,\alpha_i(s)^{-s/2}\,D_j(s),$$
$$i=1,\cdots,M;\,j=1,\cdots,N \qquad (3.5)$$

で重ね合わされる。
第Ⅲ稿で，$M=N=4$とした 16 項のおもみのうち，どのようなsについても寄与率の大きい方から 5 項で 97%超の寄与があることをみた。ここではその 5 項を採用する。

3.3. $\mathfrak{M}_1'/\mathfrak{M}_1,(\mathfrak{M}_1'/\mathfrak{M}_1)'$の計算

(3.3),(3.4)における$\mathfrak{M}_1'/\mathfrak{M}_1$，$(\mathfrak{M}_1'/\mathfrak{M}_1)'$の計算は次の通りである。
$\ln\mathfrak{M}_1(s,E_0,\theta)$を多項式で近似する。

$$\ln\mathfrak{M}_1(s,E_0,\theta)=\sum_{k=0}^{K}a_k s^k\ ,\ (K=4).$$

これを微分して数値を求める：

$$\sum_{k=1}^{K}ka_k s^{k-1}=\mathfrak{M}_1'/\mathfrak{M}_1, \qquad (3.6)$$
$$\sum_{k=2}^{K}k(k-1)a_k s^{k-2}=(\mathfrak{M}_1'/\mathfrak{M}_1)'. \qquad (3.6)'$$

$E_0/\varepsilon=10^3$について$\varepsilon\theta/E_s$を径数にした$\ln\mathfrak{M}_1(s,E_0,\theta)$の$s$に対するグラフを図 1 に例示する。多項式近似が容易にできる素直な関数であり微分は滑らかである。他のE_0/εについても事情は大同小異である。

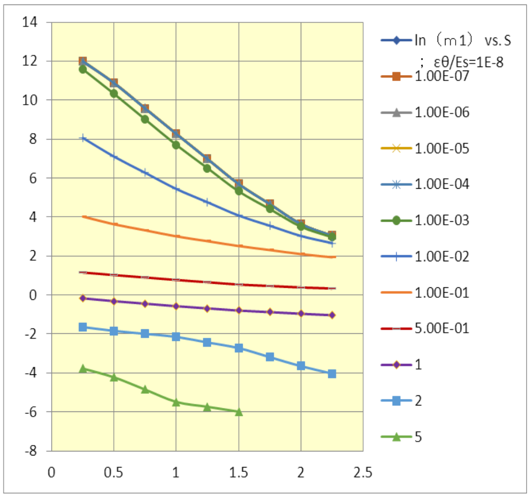

図 1. $\ln \mathfrak{M}_1(s, E_0, \theta)$ vs. s
$(E_0/\varepsilon = 10^3)$

3.4. s_1 の値

(3.3)から求めた鞍点（エイジ） s_1 を，E_0/ε を径数にして図 2 に示す。

$\varepsilon\theta/E_s \lesssim 10^{-1}$ の範囲で s_1 は急激に小さく（若く）なり $\varepsilon\theta/E_s \simeq 10^{-1}$ で $s_1 \simeq 1$ に収束する（図 2 上）。ここを境に大小関係が逆転し $\varepsilon\theta/E_s \simeq 0.5$ で最小を示す。

その後，略最小値を保ち $\varepsilon\theta/E_s \gtrsim 1.5$ で微増する（図 2 下，横軸が線形）。

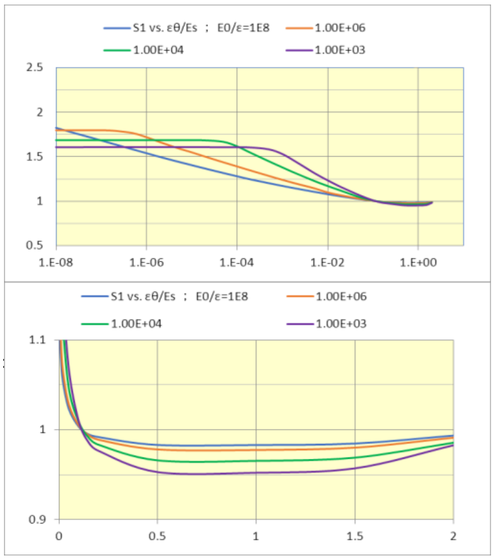

図 2　s_1　vs.　$\varepsilon\theta/E_s$

3.5. 角分布関数の数値とグラフ

$\Pi_1(E_0, 0, \theta, t)/(\varepsilon/E_s)^2$ のグラフを図 3-1 に示す。数値は補遺（表 1）に示す。分布関数の形状には§2.2 でみた変化が見られる。

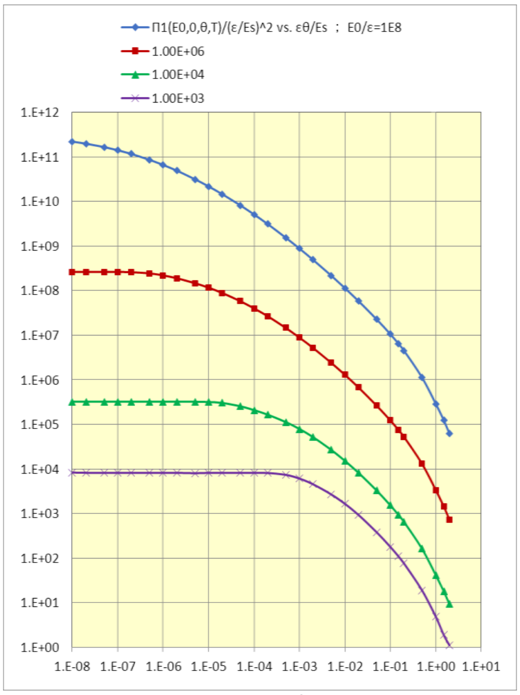

図 3-1.　$\Pi_1(E_0, 0, \theta, T)/(\varepsilon/E_s)^2$ vs. $\varepsilon\theta/E_s$

形状の直接の比較には規格化関数；

$$\int_0^\infty \tilde{\Pi}_1(E_0, 0, \theta, T)\, 2\pi\theta\, d\theta = 1$$

の比較が適切である。図 3-2 に示す。

(i) 平坦な領域は $E_0/\varepsilon \to$ 小とともに広くなっていく。その外の領域において形状は E_0/ε に依らない。

(ii) ベキはほぼ –0.93.

(iii) $10^{-1} \lesssim \varepsilon\theta/E_s$ でベキからずれる。

(iv) 電子数過多（凸）は存在しない。

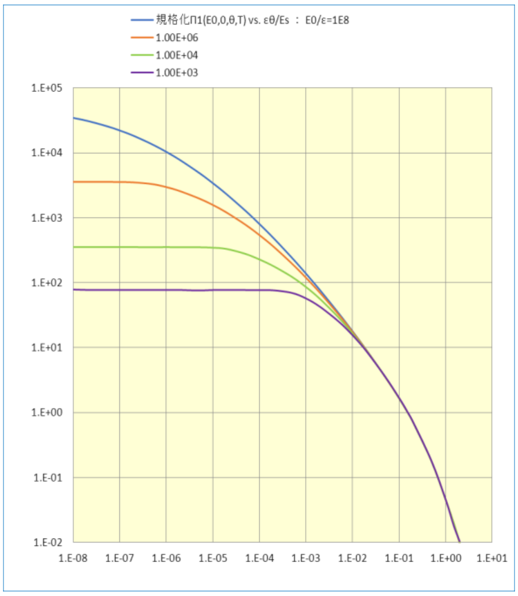

図 3-2. $\widetilde{\Pi}_1\left(E_0, 0, \theta, T\right)$ vs. $\varepsilon\theta / E_s$

3.6. 角分布関数に電子数過多は存在しない

B 近似電子数ラテラル分布関数，

$\Pi_2\left(E_0, 0, r, T\right)$，に電子数の過多 (凸)

が存在した（$E_0/\varepsilon = 10^4, 10^3$）。[2)]

そこで，角分布の特定の円錐殻の中に電子数過多が存在すると仮定する。そうすれば頂点から投影した平面上の同心円内にそれが反映すると考えられる。しかし角分布関数に凸は存在しない（図 3-1)。ではなぜ存在しないか。検討する。

角分布関数は次の 5 種の関数で構成される。

$$\Pi_1\left(E_0, 0, \theta, T\right)$$
$$= \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s \frac{\mathfrak{M}_1\left(s, E_0, \theta\right) H_1(s) \mathrm{e}^{\lambda_1(s) T}}{\sqrt{\lambda_1''(s) T + \left(\mathfrak{M}_1' / \mathfrak{M}_1\right)'|_s}}.$$

エイジ s を介して θ に依存する 5 種の関数は減少関数と増加関数の 2 群に分けることができる：

$$f_1(\theta) = \left(E_0/\varepsilon\right)^s \mathfrak{M}_1\left(s, E_0, \theta\right)$$

および

$$f_2(\theta) = \frac{H_1(s) \mathrm{e}^{\lambda_1(s) T}}{\sqrt{\lambda_1''(s) T + \left(\mathfrak{M}_1' / \mathfrak{M}_1\right)'|_s}}.$$

図 4-1，4-2 に示すように，$f_1(\theta)$（青色）は平坦から単調に減少する関数，$f_2(\theta)$（茶色）は平坦から単調に増加する関数。両者の積（緑色）が分布関数を表す。

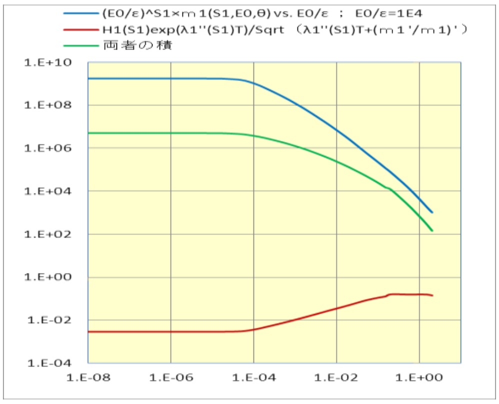

図 4-1. $\Pi_1(\theta)$ を構成する $f_1(\theta)$ と $f_2(\theta)$（$E_0/\varepsilon = 10^4$）

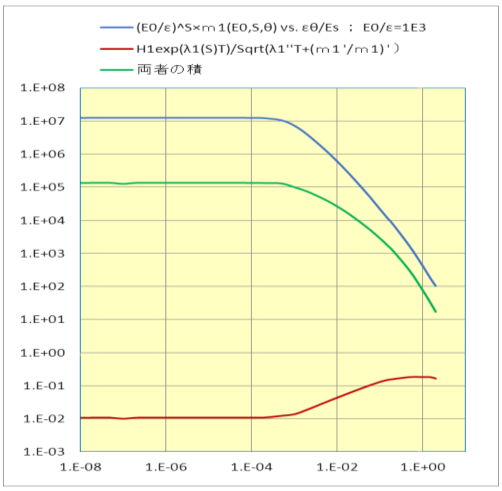

図 4-2. $\Pi_1(\theta)$ を構成する $f_1(\theta)$ と $f_2(\theta)$（$E_0/\varepsilon = 10^3$）

図からわかるように$f_1(\theta)$の減少率の方が$f_2(\theta)$の増加率より激しい。よって積$f_1(\theta)\times f_2(\theta)$は減少関数となる。ゆえに凸は現れない。つまり電子数過多が角分布に現れない理由は角分布関数を構成する 5 種の関数の振る舞いにある。

電子数過多はラテラル分布に出現したが角分布には存在しない 。この原因は散乱過程を記述する漸化式が角分布の場合とラテラル分布の場合とで異なる点にあると考えられる。[3)]

参考文献

1)https://keisan.casio.jp/exec/system/1161228685

2)新居誠彦，足利大学研究集録 第 57 号(2022.3)

3) J.Nishimura,Handbuch der Physik, **XLVI/2**(1967), § 21.

※　足利大学名誉教授

補 遺.　角分布関数の数値

角分布関数$\Pi_1(E_0,0,\theta,T)/(\varepsilon/E_s)^2$の数値を表 1 に示す。

B近似角分布関数 Π 1(E0,0,θ ,T)/(ε /Es)^2				
Eθ/Es	1E+08	1E+06	1E+04	1E+03
1E-08	2.205.E+11	2.645.E+08	3.239.E+05	8.336.E+03
2E-08	1.985.E+11	2.644.E+08	3.239.E+05	8.225.E+03
5E-08	1.662.E+11	2.640.E+08	3.237.E+05	8.209.E+03
1E-07	1.411.E+11	2.633.E+08	3.241.E+05	8.199.E+03
2E-07	1.165.E+11	2.598.E+08	3.239.E+05	8.200.E+03
5E-07	8.614.E+10	2.443.E+08	3.234.E+05	8.195.E+03
1E-06	6.610.E+10	2.200.E+08	3.237.E+05	8.199.E+03
2E-06	4.914.E+10	1.897.E+08	3.232.E+05	8.197.E+03
5E-06	3.158.E+10	1.473.E+08	3.224.E+05	8.061.E+03
1E-05	2.181.E+10	1.168.E+08	3.176.E+05	8.195.E+03
2E-05	1.458.E+10	8.871.E+07	3.034.E+05	8.201.E+03
5E-05	8.194.E+09	5.802.E+07	2.552.E+05	8.192.E+03
1E-04	5.120.E+09	4.011.E+07	2.093.E+05	8.157.E+03
2E-04	3.117.E+09	2.671.E+07	1.652.E+05	8.111.E+03
5E-04	1.543.E+09	1.458.E+07	1.128.E+05	7.394.E+03
1E-03	8.812.E+08	8.847.E+06	7.892.E+04	6.095.E+03
2E-03	4.905.E+08	5.173.E+06	5.170.E+04	4.530.E+03
5E-03	2.173.E+08	2.404.E+06	2.681.E+04	2.694.E+03
1E-02	1.140.E+08	1.293.E+06	1.521.E+04	1.653.E+03
2E-02	5.821.E+07	6.705.E+05	8.161.E+03	9.284.E+02
5E-02	2.276.E+07	2.630.E+05	3.288.E+03	3.807.E+02
1E-01	1.058.E+07	1.229.E+05	1.529.E+03	1.792.E+02
1.5E-01	6.525.E+06	7.586.E+04	9.427.E+02	1.104.E+02
2E-01	4.512.E+06	5.240.E+04	6.492.E+02	7.588.E+01
5E-01	1.122.E+06	1.303.E+04	1.613.E+02	1.884.E+01
1	2.910.E+05	3.376.E+03	4.176.E+01	4.869.E+00
1.5	1.236.E+05	1.440.E+03	1.794.E+01	1.887.E+00
2	6.228.E+04	7.308.E+02	9.254.E+00	1.107.E+00

表 1.　$\Pi_1(E_0,0,\theta,T)/(\varepsilon/E_s)^2$

原稿受付日　令和 5 年 1 月 1 日