

# 3次元電磁カスケード B 近似理論

## 角分布関数の計算

### Ⅲ. 角分布関数の構成要素

新居 誠彦 \*

Calculation of Angular Distribution Function  
in Three Dimensional Electron-Photon Cascade Theory.  
Ⅲ. Components of Angular Distribution Function.

NII Nobuhiko

#### Abstract

We evaluate the components which construct the angular distribution function.

Those are  $\exp(P(s)t), \rho_n(s), \sigma_m(s), C_i(s), \alpha_i(s), D_j(s), \beta_j(s)$  and so on.

**Keywords** : three-dimensional cascade theory, recurrence formula, cascade function,

#### 1. はじめに

行列  $e^{P(s)t}$  の成分と関数形 ; 漸化式の要

素  $\rho_n(s), \sigma_m(s)$  の関数形と数値 ; 係数

$C_i(s), \alpha_i(s), D_j(s), \beta_j(s)$  や重み

$w_{ij}(s)$  の数値を求める。

$$P(s) = \begin{pmatrix} -A(s) & B(s) \\ C(s) & -\sigma_0 \end{pmatrix}$$

の固有値は  $|P(s) - \lambda U| = 0$  から,

$$\lambda_1(s) = \frac{1}{2}[-A(s) - \sigma_0 + \sqrt{(A(s) - \sigma_0)^2 + 4B(s)C(s)}], \quad (2.1)$$

#### 2 指数行列 $\exp(P(s)t)$

##### 2.1. 固有値

$$\lambda_2(s) = \frac{1}{2}[-A(s) - \sigma_0 - \sqrt{(A(s) - \sigma_0)^2 + 4B(s)C(s)}]. \quad (2.2)$$

次の関係が成り立つ。

$$\lambda_1(s) + \lambda_2(s) = -A(s) - \sigma_0, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda_1(s) + A(s))(\lambda_1(s) + \sigma_0) \\ &= (\lambda_2(s) + A(s))(\lambda_2(s) + \sigma_0) \\ &= B(s)C(s). \end{aligned} \quad (2.4)$$

## 2.2. 対角化と指数行列

$$\begin{aligned} S^{-1}P(s)S &= \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}, \\ S &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\lambda_1(s) + A(s)}{B(s)} & \frac{\lambda_2(s) + A(s)}{B(s)} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} S^{-1} &= \frac{1}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} \\ &\times \begin{pmatrix} \lambda_1(s) + \sigma_0 & B(s) \\ -\lambda_2(s) - \sigma_0 & -B(s) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$e^{P(s)t} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(s)t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(s)t} \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} e^{\lambda_1(s)t} \\ &- \frac{\lambda_2(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} e^{\lambda_2(s)t} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\equiv H_1(s)e^{\lambda_1(s)t} + H_2(s)e^{\lambda_2(s)t}, \quad (2.7)'$$

$$b = \frac{B(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} (e^{\lambda_1(s)t} - e^{\lambda_2(s)t}), \quad (2.8)$$

$$c = \frac{C(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} (e^{\lambda_1(s)t} - e^{\lambda_2(s)t}), \quad (2.9)$$

$$d = H_2(s)e^{\lambda_1(s)t} + H_1(s)e^{\lambda_2(s)t}. \quad (2.10)$$

$a, b, c, d$  は各々つぎの成分を記述する：

$$e \rightarrow e, \gamma \rightarrow e, e \rightarrow \gamma, \gamma \rightarrow \gamma.$$

次の恒等式が成り立つ。

$$H_1(s) + H_2(s) = 1, \quad (2.11)$$

$$H_1(s)\lambda_2(s) + H_2(s)\lambda_1(s) = -\sigma_0. \quad (2.12)$$

## 2.3. (2.7)' のラプラス変換

$$a(s, \alpha) = \int_0^\infty dt e^{-\alpha t} \sum_{i=1,2} H_i(s) e^{\lambda_i(s)t}.$$

(2.11), (2.12) を用いると,

$$a(s, \alpha) = \frac{\alpha + \sigma_0}{(\alpha - \lambda_1(s))(\alpha - \lambda_2(s))}. \quad (2.13)$$

## 3. $\rho_n(s), \sigma_m(s)$ の数値

2重和をもつ  $f(E_0, E, \zeta, t)$  の表式を第 I

稿 § 7 で得た。各々の和に次式で計算される係数  $\rho_n(s), \sigma_m(s)/\rho_{2m}(s)$  を含む。

$$\begin{aligned} \rho_n(s) &= \prod_{k=1}^n \left\{ \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_1(s+k)} \right. \\ &\times \left. \frac{1}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s+k)} \right\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_m(s) &= \prod_{k=1}^m \left\{ \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_1(s+2k)} \right. \\ &\times \left. \frac{1}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s+2k)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

$\rho_n(s), \sigma_m(s), \sigma_m(s)/\rho_{2m}(s)$  の値を

図表に示す。

### 3.1. $\rho_n(s)$ の値

(3.1) で  $n=14$  とした  $\rho_n(s)$  の値とグラ

フを表 1, 図 1 に示す。

$\rho_n(s)$							
$n \downarrow / S \rightarrow$	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0.3520426	0.535542	0.817573	1.011395	1.138675	1.226093	1.293491
2	0.101991	0.218294	0.465109	0.677622	0.832552	0.943611	1.031231
3	0.0265909	0.077236	0.22036	0.369504	0.488167	0.575895	0.645769
4	0.006447	0.024852	0.092614	0.17636	0.248466	0.303193	0.346928
5	0.0014791	0.007449	0.035641	0.076394	0.114172	0.143562	0.167063
6	0.0003246	0.00211	0.0128	0.030683	0.048469	0.062645	0.073979
7	6.865E-05	0.000571	0.004344	0.011588	0.019297	0.025593	0.030626
8	1.407E-05	0.000148	0.001406	0.004156	0.007282	0.009897	0.011989
9	2.804E-06	3.73E-05	0.000437	0.001426	0.002624	0.003652	0.004475
10	5.456E-07	9.08E-06	0.000131	0.000471	0.000909	0.001294	0.001603
11	1.039E-07	2.16E-06	3.8E-05	0.00015	0.000304	0.000442	0.000554
12	1.939E-08	5E-07	1.07E-05	4.64E-05	9.83E-05	0.000146	0.000185
13	3.556E-09	1.13E-07	2.94E-06	1.4E-05	3.09E-05	4.7E-05	6.01E-05
14	6.414E-10	2.52E-08	7.9E-07	4.1E-06	9.48E-06	1.47E-05	1.9E-05

表 1.  $\rho_n(s)$

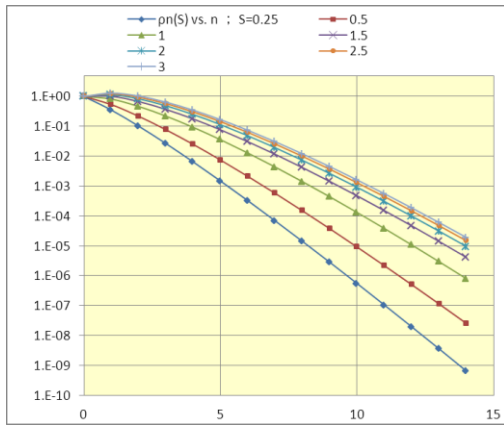


図 1.  $\rho_n(s)$  vs.  $n$

### 3.2. $\sigma_m(s), \sigma_m(s)/\rho_{2m}(s)$ の値

(i) (3.2)で  $m=7$  とした  $\sigma_m(s)$  の値とグラフを表 2, 図 2 に示す。

$\sigma_m(s)$							
$m \downarrow / S \rightarrow$	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0.289712	0.407613	0.568889	0.669988	0.731159	0.769608	0.797247
2	0.0702413	0.131156	0.239094	0.319778	0.372143	0.405178	0.428306
3	0.0154152	0.037156	0.085867	0.128435	0.157984	0.176806	0.189663
4	0.0031588	0.009659	0.027786	0.046065	0.059613	0.068374	0.074247
5	0.0006146	0.002355	0.008325	0.015205	0.02064	0.024222	0.026593
6	0.0001147	0.000546	0.002348	0.004703	0.006682	0.008016	0.008892
7	2.069E-05	0.000121	0.00063	0.00138	0.002048	0.00251	0.002812

表 2.  $\sigma_m(s)$

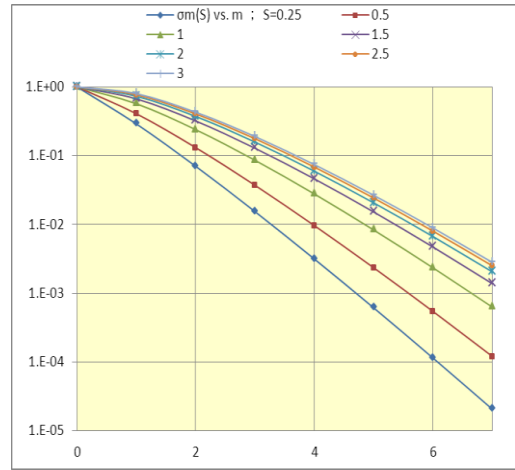


図 2.  $\sigma_m(s)$  vs.  $m$

(ii)  $\sigma_m(s)/\rho_{2m}(s)$  の値とグラフを表 3, 図 3 に示す。この数値は表 1, 2 を組み合わせて得られる。

$\sigma_m(s)/\rho_{2m}(s)$							
$m \downarrow / S \rightarrow$	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0	1	1	1	1	1	1	1
1	2.8405654	1.867266	1.223133	0.988733	0.878214	0.815599	0.773102
2	10.895146	5.277478	2.581634	1.813207	1.497762	1.336369	1.23457
3	47.489398	17.60815	6.70832	4.185914	3.259483	2.822328	2.563747
4	224.54336	65.1158	19.76614	11.08346	8.186785	6.908268	6.192872
5	1126.3581	259.2016	63.64235	32.30245	22.71676	18.7213	16.59065
6	5916.4573	1092.089	219.2854	101.274	67.97682	54.78257	48.03621
7	32266.352	4817.532	797.8424	336.6226	216.052	170.4134	147.9288

表 3.  $\sigma_m(s)/\rho_{2m}(s)$

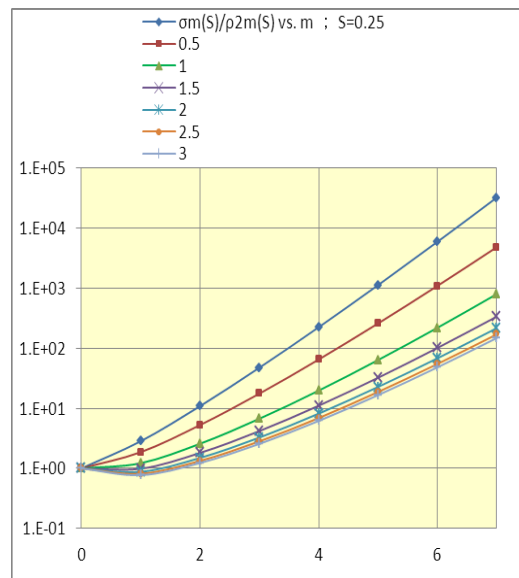


図 3.  $\sigma_m(s)/\rho_{2m}(s)$  vs.  $m$

3.4.  $n!\rho_n(s)$  と  $m!\sigma_m(s)/\rho_{2m}(s)$

— Prony 法の対象として

$n!\rho_n(s), m!\sigma_m(s)/\rho_{2m}(s)$  を Prony 法を用いて各々次のように表した (第 I 稿)。

$$n!\rho_n(s) = \sum_{j=1}^N D_j(s)\beta_j(s)^n, \quad (3.3)$$

$$m!\sigma_m(s)/\rho_{2m}(s) = \sum_{i=1}^M C_i(s)\alpha_i(s)^m. \quad (3.4)$$

各左辺の値を表 4 図 4; 表 5 図 5 に示す。

(i)  $n!\rho_n(s)$

$n! \times \rho_n(S)$	0.25		0.5		1		1.5		2		2.5		3	
$n \downarrow / S \rightarrow$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0														
1	0.352043	0.535542	0.817573	1.011395	1.138675	1.226093	1.293491							
2	0.203982	0.436588	0.930217	1.355245	1.665104	1.887223	2.062463							
3	0.159546	0.463418	1.322162	2.217026	2.929004	3.455369	3.874613							
4	0.154729	0.59645	2.222725	4.232645	5.963178	7.276643	8.326263							
5	0.177491	0.893834	4.276973	9.167246	13.70067	17.22741	20.04752							
6	0.233714	1.519295	9.216068	22.09145	34.8977	45.10462	53.26468							
7	0.346003	2.875857	21.89453	58.40329	97.2591	128.9904	154.3549							

表 4.  $n!\rho_n(s)$

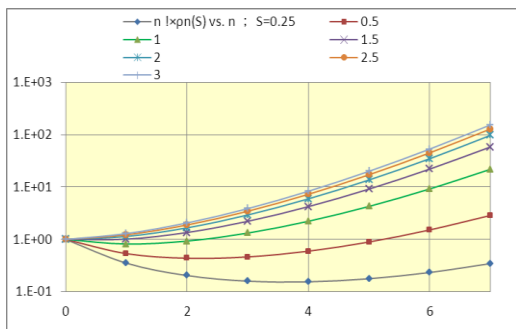


図 4.  $n!\rho_n(s)$  vs.  $n$

(ii)  $m!\sigma_m(s)/\rho_{2m}(s)$

$m! \times \sigma_m(S) / \rho_{2m}(S)$	0.25		0.5		1		1.5		2		2.5		3	
$m \downarrow / S \rightarrow$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0														
1	2.8405654	1.867266	1.223133	0.988733	0.878214	0.815599	0.773102							
2	21.790292	10.55496	5.163267	3.626414	2.995525	2.672739	2.46914							
3	284.93639	105.6489	40.24992	25.11549	19.5569	16.93397	15.38248							
4	5389.0406	1562.779	474.3873	266.003	196.4828	165.7984	148.6289							
5	135162.97	31104.19	7637.082	3876.294	2726.011	2246.556	1990.879							
6	4259849.2	786304.3	157885.5	72917.29	48943.31	39443.45	34586.07							
7	162622415	24280363	4021126	1696578	1088902	858883.4	745561.4							

表 5.  $m!\sigma_m(s)/\rho_{2m}(s)$

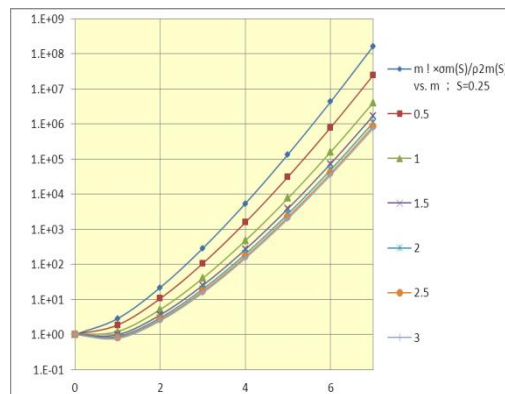


図 5.  $m!\sigma_m(s)/\rho_{2m}(s)$  vs.  $m$

3.5.  $D_j(s), \beta_j(s); C_i(s), \alpha_i(s)$  の値

(i) (3.3) で  $N=4$  として求めた  $D_j(s), \beta_j(s)$  の値を表 6 に, グラフを図 6-1, 6-2 に示す。

$S=$	0.5	1	1.5	2	2.5	3
D1	0.399265	0.334195	0.301019	0.282511	0.270382	0.260933
D2	0.489995	0.524693	0.541323	0.551059	0.557941	0.563383
D3	0.107735	0.136738	0.152491	0.160865	0.165909	0.169782
D4	0.003005	0.004374	0.005167	0.005565	0.005768	0.005902
$\beta_1$	0.16457	0.269015	0.355875	0.424866	0.481033	0.529675
$\beta_2$	0.63858	0.888572	1.054717	1.163437	1.237988	1.295137
$\beta_3$	1.387186	1.811832	2.067415	2.218749	2.310209	2.371725
$\beta_4$	2.491264	3.130911	3.496344	3.702593	3.818201	3.887771

表 6.  $D_j(s), \beta_j(s)$

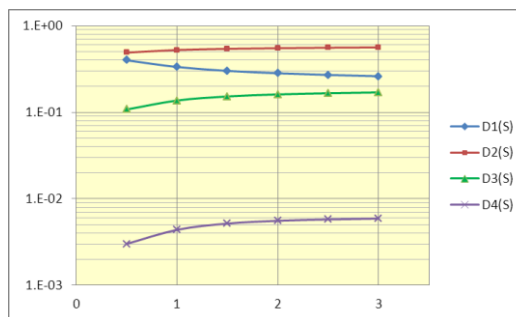


図 6-1  $D_1, D_2, D_3, D_4$  vs.  $s$

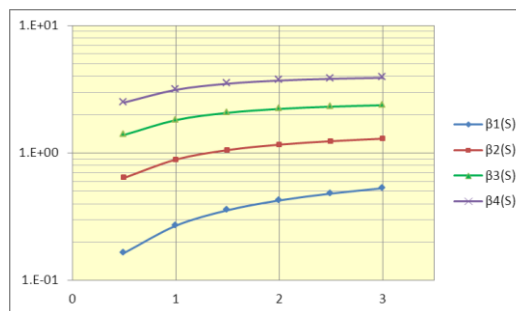


図 6-2  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  vs.  $s$

(ii) (3.4)で  $M = 4$  として求めた  $C_i(s)$ ,  $\alpha_i(s)$  を表 7, グラフを図 7-1, 7-2 に示す。

S=	0.5	1	1.5	2	2.5	3
C1	0.78017	0.815631	0.832676	0.842532	0.849408	0.85495
C2	0.208093	0.175722	0.159961	0.150766	0.144315	0.139107
C3	0.011652	0.008591	0.007318	0.006662	0.00624	0.005908
C4	8.55E-05	5.61E-05	4.53E-05	4.02E-05	3.72E-05	3.5E-05
$\alpha_1$	0.635527	0.422538	0.345017	0.308334	0.287754	0.274188
$\alpha_2$	5.590961	4.300181	3.795686	3.561544	3.442604	3.373121
$\alpha_3$	17.54666	14.07788	12.69034	12.04975	11.74268	11.58543
$\alpha_4$	41.55217	34.20343	31.21073	29.8153	29.15284	28.83165

表 7.  $C_i(s), \alpha_i(s)$

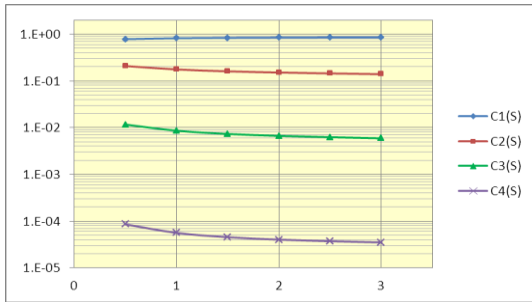


図 7-1  $C_1, C_2, C_3, C_4$  vs.  $s$

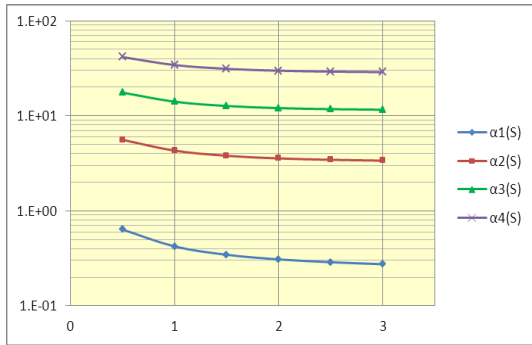


図 7-2  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  vs.  $s$

#### 4. 重畳のおもみ

第 I 稿(8.6)でみたように, B 近似角分布関数は不完全ガンマ関数の重ね合わせで記述される。表 4, 5 から重畳のおもみ;

$$w_{ij}(s) = C_i(s) \alpha_i(s)^{-s/2} \times D_j(s) \quad (4.1)$$

※ 足利大学名誉教授

は表 8 のように得られる。各  $s$  について 16 項のうち値の大きい方から 5 項で 97.7%~99.7%の寄与がある。おもみにはこの 5 項を採用すれば十分である。  $w_{ij}(1)$  を図 8 に例示する。

	j=1	j=2	j=3	j=4
S=0.5				
i=1	0.348873	0.428151	0.094138	0.002626
i=2	0.054031	0.06631	0.014579	0.000407
i=3	0.002273	0.00279	0.000613	1.71E-05
i=4	1.34E-05	1.65E-05	3.63E-06	1.01E-07
S=1				
	0.419335	0.658364	0.171574	0.005489
	0.028319	0.044462	0.011587	0.000371
	0.000765	0.001201	0.000313	1.00E-05
	3.21E-06	5.04E-06	1.31E-06	4.20E-08
S=1.5				
	0.556788	1.001273	0.28206	0.009557
	0.017707	0.031842	0.00897	0.000304
	0.000328	0.000589	0.000166	5.62E-06
	1.03E-06	1.86E-06	5.23E-07	1.77E-08
S=2				
	0.771969	1.505784	0.439568	0.015206
	0.011959	0.023327	0.00681	0.000236
	0.000156	0.000305	8.89E-05	3.08E-06
	3.81E-07	7.43E-07	2.17E-07	7.50E-09
S=2.5				
	1.089729	2.248687	0.668666	0.023245
	0.008321	0.017171	0.005106	0.000177
	7.76E-05	0.00016	4.76E-05	1.66E-06
	1.49E-07	3.06E-07	9.11E-08	3.17E-09
S=3				
	1.553802	3.354835	1.011017	0.035148
	0.005859	0.01265	0.003812	0.000133
	3.91E-05	8.44E-05	2.54E-05	8.84E-07
	5.90E-08	1.27E-07	3.84E-08	1.33E-09

表 8.  $w_{ij}(s)$

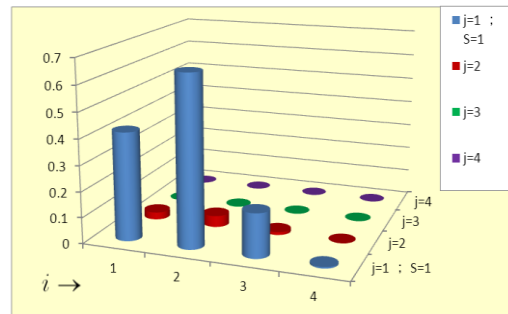


図 8  $w_{ij}(1)$  vs.  $i$  &  $j$