3次元電磁カスケードB近似理論
角分布関数の計算
Ⅱ. 解析接続の方法に基づく計算

新 居 誠 彦 ※

Calculation of Angular Distribution Function
in Three Dimensional Electron-Photon Cascade Theory.
Ⅱ. Application of Analytic Continuation to
Calculate Angular Distribution Function.

NII Nobuhiko

Abstract

By using a method of analytic continuation, we derivate an expression of the angular distribution function for electron, under Approximation B in the three-dimensional cascade theory.

Keywords **:** *three-dimensional cascade theory, analytic continuation, Prony's interpolation method, electron angular distribution function.*

1. はじめに

J.Nishimura は電磁カスケードB近似理論において1次元遷移曲線や3次元ラテラル分布関数の計算を複素平面上で行う解析接続の方法を提唱した。カスケード理論における優れた計算方法である。本稿で，解析接続の方法を用いて角分布関数の計算を試みる。

2. Nishimura による解析接続の方法

Nishimura による3次元ラテラル分布関数の計算を顧みる。

ラテラル分布関数微分型 π_2 は次の関数, f_2，のハンケル変換から求める。[1)]

$$\pi_2\left(E_0,E,r,t\right)$$
$$=\int_0^\infty f_2\left(E_0,E,x,t\right)J_0\left(rx\right)xdx,$$
$$f_2\left(E_0,E,x,t\right)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{ds}{E}$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{{E_s}^2x^2}{4E^2}\right)^m\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n\phi_{mn}\left(s,t\right). \tag{2.1}$$

【ϕ_{mn} の漸化式は省略】

ところが(2.1)のハンケル変換は恒等的にゼロである；

$$\int_0^\infty x^{2m+1} J_0(rx)\,dx = 0.$$

それゆえ実数軸上での計算は意味のある結果が得られない。この事情を改善するため Nishimura は(2.1)の 2 重級数 S を複素平面へ拡張して和を求める方法，すなわち解析接続の方法を提案した。[1)]

$$\left.\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4\pi^2}\iint dp\,dq\,\Gamma(-p)\Gamma(-q) \\ &\times\left(\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\right)^p\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^q \mathfrak{M}_2(p,q,s,t), \\ &\mathfrak{M}_2(m,n,s,t)/m!n! = \phi_{mn}(s,t). \end{aligned}\right\} \quad (2.2)$$

このときハンケル変換は非ゼロとなって

$$\int_0^\infty J_0(rx)\left(\frac{x^2}{4}\right)^p x\,dx = \frac{2\Gamma(p+1)}{\Gamma(-p)}\left(r^2\right)^{-p-1}. \quad (2.3)$$

（証明を補遺に与える）

Nishimura の解析接続法の意義は正にこの点にある。

3. 角分布関数の計算

ここでは入射電子の創る電子成分 $(\mathrm{e}\rightarrow f)$ を計算の対象とする。

角分布関数積分型 Π_1 は拡散方程式の級数解 $f(E_0,E,\zeta,t)$ をエネルギーで積分してハンケル変換を施せば求められる。すなわち

$$\Pi_1(E_0,E,\theta,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F(E_0,E,\zeta,t) J_0(\theta\zeta)\zeta\,d\zeta, \quad (3.1)$$

（係数 $1/2\pi$ を乗ずる理由は第 I 稿(3.4)脚注に説明）

$$F(E_0,E,\zeta,t) = \int_E^{E_0} f(E_0,E,\zeta,t)\,dE, \quad (3.2)$$

第 I 稿§7.1 より

$$f(E_0,E,\zeta,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{ds}{E} H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\sum_{m=0}^\infty\left(-\frac{E_s{}^2\zeta^2}{4E^2}\right)^m \sum_{n=0}^\infty \frac{(s+2m+n)!}{(s+2m)!}\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n$$
$$\times\frac{\sigma_m(s)\rho_n(s)}{\rho_{2m}(s)}. \quad (3.3)$$

(3.3)の ζ^{2m} に関するハンケル変換は既述の通りゼロとなる。そこで Nishimura に準じて 2 重級数 S を複素平面へ拡張する。

$$S = -\frac{1}{4\pi^2}\int_\delta dp\,\Gamma(-p)\Gamma(p+1)$$
$$\times\left(\frac{E_s{}^2\zeta^2}{4E^2}\right)^p \frac{\sigma(p,s)}{\rho(2p,s)}$$
$$\times\int_\gamma dq\,\Gamma(-q)\Gamma(q+1)$$
$$\times\frac{(s+2p+q)!}{(s+2p)!}\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^q \rho(q,s). \quad (3.4)$$

ここに

$$\sigma(m,s) = \sigma_m(s),\ \rho(2m,s) = \rho_{2m}(s),$$
$$\rho(n,s) = \rho_n(s).$$

(3.2)のエネルギー積分 $\int_E^{E_0} E^{-s-1-2p-q}\,dE$ から生ずる因子 $(s+2p+q)^{-1}$ はガンマ関数 $(s+2p+q)!$ の一つの因子と相殺する。

$$F(E_0,E,\zeta,t)$$
$$= -\frac{1}{8\pi^3 i}\int_c E_0{}^s\,ds\,H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\times$$

$$\times\int_\delta dp\Gamma(-p)\Gamma(p+1)\left(\frac{E_s{}^2\zeta^2}{4}\right)^p\frac{\sigma(p,s)}{\rho(2p,s)}$$
$$\times\int_\gamma dq\Gamma(-q)\Gamma(q+1)\frac{(s+2p+q-1)!}{(s+2p)!}$$
$$\times\rho(q,s)\left(\frac{\varepsilon^q}{E^{s+2p+q}}-\frac{\varepsilon^q}{E_0{}^{s+2p+q}}\right). \qquad (3.5)$$

(3.5)右辺の因子$\left(\zeta^2/4\right)^p$のハンケル変換は(2.3)で$r\to\theta$と置き換えればよい。

$$\Pi_1(E_0,E,\theta,t)$$
$$=-\frac{1}{16\pi^4 i}\int_c E_0{}^s ds H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\int_\delta dp\Gamma^2(p+1)\frac{2}{\theta^2}\left(\frac{E_s}{\theta}\right)^{2p}\frac{\sigma(p,s)}{\rho(2p,s)}$$
$$\times\int_\gamma dq\Gamma(-q)\Gamma(q+1)\frac{(s+2p+q-1)!}{(s+2p)!}$$
$$\times\rho(q,s)\left(\frac{\varepsilon^q}{E^{s+2p+q}}-\frac{\varepsilon^q}{E_0{}^{s+2p+q}}\right). \qquad (3.6)$$

4. Prony 内挿法と 2 つの積分

Prony 法と留数定理を用いる。

4.1.　Prony 法の 2 ヶ所への適用

(3.6)の 2 ヶ所に Prony 法 [2] の手法を適用する。

(i)　p-積分中にある 2 重の$\Gamma(p+1)$の一つを Prony 法に当てる。

$$\Gamma(p+1)\frac{\sigma(p,s)}{\rho(2p,s)}=\sum_{i=1}^{M}C_i(s)\alpha_i(s)^p. \qquad (4.1)$$

(ii)　q-積分中の$\Gamma(q+1)$を Prony 法に当てる。

$$\Gamma(q+1)\rho(q,s)=\sum_{j=1}^{N}D_j(s)\beta_j(s)^q. \qquad (4.2)$$

$2M$個の$C_i(s),\alpha_i(s)$, $(i=1,\cdots,M)$および$2N$個の$D_j(s)$, $\beta_j(s)$,（$j=1,\cdots,N$）はそれぞれ，$2M$個の既知数$m!\sigma_m(s)/\rho_{2m}(s)$,（$m=0,\cdots,2M-1$）および$2N$個の既知数$n!\rho_n(s)$,（$n=0,\cdots,2N-1$）から一意的に定まる。このとき，

$$\Pi_1(E_0,E,\theta,t)$$
$$=-\frac{1}{16\pi^4 i}\int_c E_0{}^s ds H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\frac{2}{\theta^2}\int_\delta dp\Gamma(p+1)\sum_{i=1}^{M}C_i(s)\left(\frac{\alpha_i(s)E_s{}^2}{\theta^2}\right)^p$$
$$\times\int_\gamma dq\Gamma(-q)\frac{(s+2p+q-1)!}{(s+2p)!}\sum_{j=1}^{N}D_j(s)$$
$$\times\left(\frac{(\varepsilon\beta_j(s))^q}{E^{s+2p+q}}-\frac{(\varepsilon\beta_j(s))^q}{E_0{}^{s+2p+q}}\right). \qquad (4.3)$$

4.2.　2 つの積分

留数定理を用いて積分を実行する。

(i)　q-積分

(4.3)で$\Gamma(-q)$の極は$q=k$ $(k=0,1,\cdots)$,

留数は$(-1)^k/k!$.　q-積分の部分をQと記す。極を含むように積分路γをとると，

$$Q=\frac{1}{s+2p}\sum_{j=1}^{N}D_j(s)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{s+2p+k-1}{k}$$
$$\times\{\frac{1}{E^{s+2p}}\left(-\frac{\varepsilon\beta_j(s)}{E}\right)^k-\frac{1}{E_0{}^{s+2p}}\left(-\frac{\varepsilon\beta_j(s)}{E_0}\right)^k\}. \qquad (4.4)$$

級数 $A=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha+k}{k}(-x)^k$ は $|x|<1$ のとき和が存在し $A=1/(1+x)^{\alpha+1}$. よって(4.4)は $\varepsilon\beta_j(s)/E<1$ なら和が存在する。この条件を満す大きな E を対象にすると

$$Q=\frac{1}{s+2p}\sum_{j=1}^{N}D_j(s)$$
$$\times\{\frac{1}{E^{s+2p}}\frac{1}{\left(1+\varepsilon\beta_j(s)/E\right)^{s+2p}}$$
$$-\frac{1}{E_0^{\,s+2p}}\frac{1}{\left(1+\varepsilon\beta_j(s)/E_0\right)^{s+2p}}\}. \qquad (4.5)$$

(4.5)の 2 つの括弧内の各分数は左側にある因子と相俟って分子と分母とが分離する。すなわち,

$$Q=\frac{1}{s+2p}\sum_{j=1}^{N}D_j(s)$$
$$\times\{\frac{1}{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^{s+2p}}-\frac{1}{\left(E_0+\varepsilon\beta_j(s)\right)^{s+2p}}\}. \qquad (4.5)'$$

よって，和が存在するための条件「大きな E 」をここで除くことができる。以降で極限（$E\to 0$）が可能となる。

(ii) p-積分

(4.3)で $\Gamma(p+1)$ の極は $p=-k-1$ $(k=0,1,\cdots)$, 留数は $(-1)^k/k!$. 他方(4.5)′で $1/(s+2p)$ は極をもたない。※)　極を含むように積分路 δ をとる。(4.5)′ の第 1 項をとりあげる。

※)　$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{A^{\delta}}-\frac{1}{B^{\delta}}\right)=\ln\frac{B}{A}<\infty, \delta=s+2p$.

留数定理を用いると,

$$第 1 項=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{C_i(s)D_j(s)}{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^{s}}$$
$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(s-2k-2)}\left(\frac{\alpha_i(s)E_s^{\,2}}{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2\theta^2}\right)^{-k-1}$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{E_s}\right)^{s}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{C_i(s)D_j(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}}$$
$$\times\gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2\theta^2}{\alpha_i(s)E_s^{\,2}}\right). \qquad (4.6)$$

ここに,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+\alpha}}{k!(k+\alpha)}=\gamma(\alpha,x) \qquad (4.7)$$

は第 1 種不完全ガンマ関数。[3]
同様に計算される第 2 項を加えれば(4.3)の p -,q -積分は成就する。

5. 角分布関数

以上から角分布関数は,

$$\Pi_1(E_0,E,\theta,t)$$
$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c\left(\frac{E_0\theta}{E_s}\right)^{s}\frac{ds}{\theta^2}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}}\sum_{j=1}^{N}D_j(s)$$
$$\times\{\gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{\left(E_0+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2\theta^2}{\alpha_i(s)E_s^{\,2}}\right)$$
$$-\gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2\theta^2}{\alpha_i(s)E_s^{\,2}}\right)\}. \qquad (5.1)$$

または第 2 種不完全ガンマ関数，[3]

$$\Gamma(\alpha,x)=\Gamma(x)-\gamma(\alpha,x)$$

を用いると,

$$\Pi_1\left(E_0,E,\theta,t\right)$$
$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c\left(\frac{E_0\theta}{E_s}\right)^s\frac{ds}{\theta^2}H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i\left(s\right)}{\alpha_i\left(s\right)^{s/2}}\sum_{j=1}^{N}D_j\left(s\right)$$
$$\times\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{\left(E+\varepsilon\beta_j\left(s\right)\right)^2\theta^2}{\alpha_i\left(s\right)E_s{}^2}\right)$$
$$-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{\left(E_0+\varepsilon\beta_j\left(s\right)\right)^2\theta^2}{\alpha_i\left(s\right)E_s{}^2}\right)\}. \quad (5.2)$$

(5.2)は実数の範囲で得た結果（第 I 稿(8.5))と一致する。
異なる数学的方法で得た 2 つの結果が一致することはどちらの計算も正しいことを証明する。

参考文献

1) J.Nishimura，Handbuch der Physik. XLVI/2(1967),1.
2)日高孝次，数値積分法（第四章）（岩波書店，1942），67.
3) 森口，宇田川，一松，岩波数学公式Ⅲ（特殊函数）(1994).
4) G.N.WATSON, a treatise on the THEORY OF BESSEL FUNCTIONS, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS (1966),391.

補 遺

$$\int_0^\infty\left(\frac{t^2}{4}\right)^p J_0\left(bt\right)tdt=\frac{2\Gamma\left(p+1\right)}{\Gamma\left(-p\right)}\left(b^2\right)^{-p-1}$$

の証明

2 つの方法で証明する。

A1. 減衰因子を導入する方法

$A=\int_0^\infty t^{\mu-1}J_0\left(bt\right)dt$ の計算に Weber 積分※) に準じて減衰因子を導入する。

$$A=\lim_{a\to 0}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}\,t^{\mu-1}J_0\left(bt\right)dt.$$

$B=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}\,t^{\mu-1}J_0\left(bt\right)dt$ とおく。

ベッセル関数の級数表示 3) は

$$J_0\left(bt\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(-b^2t^2/4\right)^j\Big/j!^2.$$

よって，

$$B=a^{-\mu}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(-b^2/4a^2\right)^j}{j!^2}\left(\mu+2j-1\right)!$$
$$=a^{-\mu}\left(\mu-1\right)!F\left(\frac{\mu}{2},\frac{\mu+1}{2},1;-\frac{b^2}{a^2}\right).$$
$$F\left(\alpha,\beta,\gamma;z\right)$$
$$=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{z}{1!}+\frac{\alpha\left(\alpha+1\right)\beta\left(\beta+1\right)}{\gamma\left(\gamma+1\right)}\frac{z^2}{2!}+\cdots$$

は Gauss の超幾何関数。3)
Kummer の変換公式；3)

$$F\left(\alpha,\beta,\gamma;z\right)$$
$$=\left(1-z\right)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma;\frac{z}{z-1}\right)$$

を用いると

$$B=a^{-\mu}\left(\mu-1\right)!$$
$$\times a^{\mu}\left(a^2+b^2\right)^{-\mu/2}F\left(\frac{\mu}{2},\frac{-\mu+1}{2},1;\frac{b^2}{a^2+b^2}\right).$$

※) *Werber's infinite integral* : 4)

$$\int_0^\infty\frac{J_\nu\left(t\right)dt}{t^{\nu-\mu+1}}=\lim_{a\to\to 0}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-at}\frac{J_\nu\left(t\right)dt}{t^{\nu-\mu+1}}$$
$$=\frac{\Gamma\left(\mu\right)}{2^\nu\Gamma\left(\nu+1\right)}{}_2F_1\left(\frac{\mu}{2},\frac{1-\mu+2\nu}{2};\nu+1;1\right).$$

$$A=\lim_{a\to 0}B$$
$$=(\mu-1)!\,b^{-\mu}F\left(\frac{\mu}{2},\frac{-\mu+1}{2},1;1\right).$$

Gauss の公式 [3)]

$$F(\alpha,\beta,\gamma;1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$$

を用いると,

$$A=(\mu-1)!b^{-\mu}$$
$$\times\frac{\Gamma(1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(-\mu/2+1)\Gamma(\mu/2+1/2)}.$$

しかるに $\mu=2p+2$ だから,

$$A=\frac{b^{-2p-2}\Gamma(2p+2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(-p)\Gamma(p+3/2)}.$$

倍数公式 [3)] を用いる。

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z}}{2\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right),$$
$$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}\,,$$

$$A=b^{-2p-2}\,\frac{2^{2p+1}\Gamma(p+1)}{\Gamma(-p)}.$$

A を 2^{2p} で除して所期の結果を得る。

$$\int_0^\infty\left(\frac{t^2}{4}\right)^p J_0(bt)\,tdt=\frac{2\Gamma(p+1)}{\Gamma(-p)}\left(b^2\right)^{-p-1}.$$

※）足利大学名誉教授

A2. 複素平面上で行う方法

ベッセル関数；

$$J_0(bt)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!^2}\left(-\frac{b^2t^2}{4}\right)^j$$

を複素平面へ拡張する。

$$J_0(bt)=\frac{1}{2\pi i}\int_c dq\Gamma(-q)\Gamma(q+1)$$
$$\times\frac{1}{\Gamma^2(q+1)}\left(\frac{b^2t^2}{4}\right)^q.$$

$$\mathfrak{A}=\int_0^\infty\left(\frac{t^2}{4}\right)^p J_0(bt)\,tdt$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\delta\frac{dq\Gamma(-q)}{\Gamma(q+1)}b^{2q}\int_0^\infty\left(\frac{t^2}{4}\right)^{p+q}2\,d\left(\frac{t^2}{4}\right).$$

$\int_0^\infty=\lim_{M\to\infty}\int_0^M$ と表す。

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{2\pi i}\int_\delta\frac{dq\Gamma(-q)}{\Gamma(q+1)}2b^{2q}\lim_{M\to\infty}\frac{M^{p+q+1}}{p+q+1}.$$

$\dfrac{M^{p+q+1}}{p+q+1}$ は $q=-p-1$ に極をもつ。

$$\therefore\ \mathfrak{A}=\frac{2\Gamma(p+1)}{\Gamma(-p)}\left(b^2\right)^{-p-1}.$$

原稿受付日　令和 5 年 1 月 1 日