

# 3次元電磁カスケード B 近似理論

## 角分布関数の計算

### I. 数式の導出

新居 誠彦 \*

Calculation of Angular Distribution Function  
in Three Dimensional Electron-Photon Cascade Theory.  
I. Expression of Angular Distribution Function.

NII Nobuhiko

#### **Abstract**

We derive an expression of angular distribution function for electron, under Approximation B in the three-dimensional cascade theory.

**Keywords** : *three-dimensional cascade theory, electron angular distribution function, Suzuki-Trotter formula, Prony's interpolation method, Dirichlet series.*

#### 1. はじめに

電子の角分布関数を計算する。  
計算手順は以下の通り。  
(1) 電磁カスケード理論における3次元電磁カスケード拡散方程式 (Landau の基礎方程式) の解 (級数解) を鈴木-Trotter 公式を用いて求める。  
(2) 級数解に Prony 内挿法と Dirichlet 級数を適用しハンケル変換を実行する。  
(3) 不完全ガンマ関数を用いて表される角分布関数を導く。  
(4) Nishimura の提唱した解析接続の方法に基づいて角分布関数を計算する

(第II稿)。

(5) 角分布関数の構成要素や漸化式の計算を行う (第III稿)。

(6) 角分布関数の数値計算を行い, 結果を図表に示す (第IV)。

(7) エネルギー流角分布関数, 電子の平均エネルギー角分布関数を計算し, 結果を図表に示す (V稿)。

#### 2. Landau の基礎方程式

3次元カスケード理論における Landau の基礎方程式<sup>1)</sup> は行列表示を用いて次のように表される。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) \begin{pmatrix} \pi \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A' & B' \\ C' & -\sigma_0 \end{pmatrix} + \left(\frac{E_s^2}{4E^2} \nabla_{\theta}^2 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial E}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \gamma \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

$t$  はカスケードが発達する媒質の深さ,  $A', B', C'$  はカスケード演算子,  $\sigma_0$  は対

創生の断面積,  $E_s$  は散乱エネルギー

(21MeV),  $\varepsilon$  は電離損失の臨界エネルギー (空気については 81MeV)。<sup>2)</sup>

$$\pi(Z_0, E, \vec{r}, \vec{\theta}, t) d\vec{r} d\vec{\theta} dE, \gamma(Z_0, E, \vec{r}, \vec{\theta}, t)$$

$\times d\vec{r} d\vec{\theta} dE$  は電子, 光子の構造関数。す

なわち  $(E, E+dE)$  のエネルギーを

もち, シャワー軸から  $(\vec{r}, \vec{r}+d\vec{r})$  の位置

で軸に対して散乱角が  $(\vec{\theta}, \vec{\theta}+d\vec{\theta})$  の範

囲に入る電子, 光子の個数。  $Z_0$  は入射

粒子のエネルギー (電子は  $Z_0 = E_0$ , 光

子は  $Z_0 = W_0$ )。  $\nabla_{\theta}^2 = \partial^2/\partial\theta_1^2 + \partial^2/\partial\theta_2^2$

はラプラシアン。

### 3. いくつかの変換

#### 3.1. フーリエ変換

(2.1)の両辺に  $\exp(i\vec{r} \cdot \vec{x} + i\vec{\theta} \cdot \vec{\zeta})$  を乗

じてフーリエ変換を施すとラプラシアンの演算が実行できる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{x} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{\zeta}}\right) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -A' & B' \\ C' & -\sigma_0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial E}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$$\begin{pmatrix} f(Z_0, E, \vec{x}, \vec{\zeta}, t) \\ g(Z_0, E, \vec{x}, \vec{\zeta}, t) \end{pmatrix}$$

$$= \iiint_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} d\vec{\theta} e^{i\vec{r} \cdot \vec{x} + i\vec{\theta} \cdot \vec{\zeta}}$$

$$\times \begin{pmatrix} \pi(Z_0, E, \vec{r}, \vec{\theta}, t) \\ \gamma(Z_0, E, \vec{r}, \vec{\theta}, t) \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

フーリエ変換と逆変換をここでは次のように定義する。

$$u(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha\beta} v(\beta) d\beta,$$

$$v(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha\beta} u(\alpha) d\alpha.$$

角分布関数  $(\pi_1, \gamma_1)$  は構造関数  $(\pi, \gamma)$  を

$\vec{r}$  で積分して求められる。

$$\begin{pmatrix} \pi_1(Z_0, E, \theta, t) \\ \gamma_1(Z_0, E, \theta, t) \end{pmatrix} = \iint_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \pi(Z_0, E, \vec{r}, \vec{\theta}, t) \\ \gamma(Z_0, E, \vec{r}, \vec{\theta}, t) \end{pmatrix} d\vec{r}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \iiint_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} \iiint_{-\infty}^{\infty} d\vec{x} d\vec{\zeta} e^{-i\vec{r} \cdot \vec{x} - i\vec{\theta} \cdot \vec{\zeta}}$$

$$\times \begin{pmatrix} f(Z_0, E, \vec{x}, \vec{\zeta}, t) \\ g(Z_0, E, \vec{x}, \vec{\zeta}, t) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-i\vec{r} \cdot \vec{x}} d\vec{r} = (2\pi)^2 \delta(\vec{x}),$$

$$e^{-i\vec{\theta} \cdot \vec{\zeta}} d\vec{\zeta} = e^{-i\theta\zeta \cos\varphi} \zeta d\zeta d\varphi,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\theta\zeta \cos\varphi} d\varphi = 2\pi J_0(\theta\zeta),^{*)}$$

※) Hansen の積分表示。<sup>3)</sup>

$J_0(\theta\zeta)$  は 0 次のベッセル関数。

を用いると (3.3) は

$$\begin{pmatrix} \pi_1(Z_0, E, \theta, t) \\ \gamma_1(Z_0, E, \theta, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \begin{pmatrix} f(Z_0, E, 0, \zeta, t) \\ g(Z_0, E, 0, \zeta, t) \end{pmatrix} J_0(\theta\zeta) \zeta d\zeta. \quad (3.4)$$

(3.4)の  $(f, g)$  は  $\vec{x}=0$  とおいた(3.1)の解 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} f(Z_0, E, 0, \zeta, t) \\ g(Z_0, E, 0, \zeta, t) \end{pmatrix} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -A' & B' \\ C' & -\sigma_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ & \times \begin{pmatrix} f(Z_0, E, 0, \zeta, t) \\ g(Z_0, E, 0, \zeta, t) \end{pmatrix}. \quad (3.5) \end{aligned}$$

### 3.2. メリン変換, ハンケル変換

(3.5)をメリン変換すれば  $-A', B', C'$  の演算が実行できる。<sup>2),4)</sup>

$f(E)$  のメリン変換  $\mathfrak{M}_f(s)$  は  $s$  を複素数として次式で定義される。

$$\mathfrak{M}_f(s) = \int_0^\infty E^s f(E) dE.$$

微分関数のメリン変換は,

$$\int_0^\infty E^s \frac{df(E)}{dE} dE = -s \mathfrak{M}_f(s-1).$$

逆変換は

$$f(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} E^{-s-1} \mathfrak{M}_f(s) ds.$$

(3.5)のメリン変換は,

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s, \zeta, t) \\ \mathfrak{M}_g(s, \zeta, t) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} -A(s) & B(s) \\ C(s) & -\sigma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s, \zeta, t) \\ \mathfrak{M}_g(s, \zeta, t) \end{pmatrix} \\ & - \frac{E_s^2 \zeta^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s-2, \zeta, t) \\ \mathfrak{M}_g(s-2, \zeta, t) \end{pmatrix} \\ & - s\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s-1, \zeta, t) \\ \mathfrak{M}_g(s-1, \zeta, t) \end{pmatrix}. \quad (3.6) \end{aligned}$$

$-A(s), B(s), C(s)$  はカスケード関数。<sup>2)</sup>

(3.6)の解にメリン逆変換とハンケル変換を施せば  $(\pi_1, \gamma_1)$  が得られる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \pi_1(Z_0, E, \theta, t) \\ \gamma_1(Z_0, E, \theta, t) \end{pmatrix} = \int_0^\infty \zeta d\zeta J_0(\theta\zeta) \\ & \times \frac{1}{4\pi^2 i} \int_c \frac{ds}{E^{s+1}} \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s, \zeta, t) \\ \mathfrak{M}_g(s, \zeta, t) \end{pmatrix}. \quad (3.7) \end{aligned}$$

これをエネルギーで積分すれば角分布関数の積分型  $(\Pi_1, \Gamma_1)$  が得られる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \Pi_1(Z_0, E, \theta, t) \\ \Gamma_1(Z_0, E, \theta, t) \end{pmatrix} \\ &= \int_E^{Z_0} \begin{pmatrix} \pi_1(Z_0, E, \theta, t) \\ \gamma_1(Z_0, E, \theta, t) \end{pmatrix} dE. \quad (3.8) \end{aligned}$$

### 3.3. ずらし演算子

径数に  $s-1, s-2$  を含む(3.6)を扱うために差分演算子  $\Delta$  を導入する。

$$\Delta f(s) = f(s) - f(s-1). \quad (3.9)$$

※) 係数を除いた(3.4)の積分形をハンケル変換と呼ぶ。係数の出現は  $(2\pi)^3 / (2\pi)^4$  より。

※) (3.6)の第 2,3 項に  $\mathfrak{M}_g$  は存在しないが式を見やすくするために  $\mathfrak{M}_f$  と併記する。不都合は生じない。

$f(s-1)=(1-\Delta)f(s)$  と表すことができ  
るので  $(1-\Delta)$  を「ずらし演算子」とこ  
こでは呼ぶ。次式が成り立つ。

$$(1-\Delta)^n f(s) = f(s-n),$$

$$(1-\Delta)^m f(s)(1-\Delta)^n g(s) \\ = f(s-m)g(s-m-n).$$

ずらし演算子を用いると(3.6)は,

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s, \zeta, t) \\ \mathfrak{M}_g(s, \zeta, t) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -A(s) & B(s) \\ C(s) & -\sigma_0 \end{pmatrix} \\ - \left( \frac{E_s^2 \zeta^2}{4} (1-\Delta)^2 + s\varepsilon(1-\Delta) \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \} \\ \times \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s, \zeta, t) \\ \mathfrak{M}_g(s, \zeta, t) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

ここで次の略記を導入する：

$$\begin{pmatrix} -A(s) & B(s) \\ C(s) & -\sigma_0 \end{pmatrix} = P(s), \quad (3.11.1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_0, \quad -s\varepsilon Q_0 = Q(s), \quad (3.11.2)$$

$$-\frac{E_s^2 \zeta^2}{4} Q_0 = R(\zeta) \quad (3.11.3)$$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s, \zeta, t) \\ \mathfrak{M}_g(s, \zeta, t) \end{pmatrix} = \mathfrak{M}(s, \zeta, t). \quad (3.11.4)$$

(3.10)は次のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{M}(s, \zeta, t) =$$

$$= \left( P(s) + Q(s)(1-\Delta) + R(\zeta)(1-\Delta)^2 \right) \\ \times \mathfrak{M}(s, \zeta, t). \quad (3.12)$$

$$PQ \neq QP, \quad PR \neq RP.$$

#### 4. 鈴木-Trotter 公式の適用

非可換行列を含む微分方程式(3.12)の解は鈴木-Trotter 公式<sup>5),6)</sup>を用いて表すことができる：

$$\mathfrak{M}(s, \zeta, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_n(s, \zeta, t), \\ \mathfrak{M}_n(s, \zeta, t) \\ = \left( e^{R(s)(1-\Delta)^2 \Delta t} e^{Q(s)(1-\Delta) \Delta t} e^{P(s) \Delta t} \right)^n \\ \times \mathfrak{M}_0(s), \quad (4.1)$$

$$\Delta t = t/n.$$

初期条件を電子光子の同時入射とすると

$$\mathfrak{M}_0(s) = \int_0^\infty E^s dE \begin{pmatrix} \delta(E - E_0) \\ \delta(E - E_0) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} E_0^s \\ W_0^s \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

$(f, g)^{\ast}$  は次のように求められる。

$$\begin{pmatrix} f(Z_0, E, \zeta, t) \\ g(Z_0, E, \zeta, t) \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} f(Z_0, E, \zeta, t) \\ g(Z_0, E, \zeta, t) \end{pmatrix}_n, \\ \begin{pmatrix} f(Z_0, E, \zeta, t) \\ g(Z_0, E, \zeta, t) \end{pmatrix}_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{ds}{E^{s+1}} \\ \times \left( e^{R(\zeta)(1-\Delta)^2 \Delta t} e^{Q(s)(1-\Delta) \Delta t} e^{P(s) \Delta t} \right)^n \begin{pmatrix} E_0^s \\ W_0^s \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

※)  $f(Z_0, E, 0, \zeta, t)$  を  $f(Z_0, E, \zeta, t)$  と記す。  
 $g$  も同様。

5.  $(f, g)$  の計算

(4.3)の 2 つの指数行列を

$$e^{Q(s)(1-\bar{\Delta})\Delta t} = U + Q(s)(1-\bar{\Delta})\Delta t + o(\Delta t)^2,$$

$$e^{R(\zeta)(1-\bar{\Delta})^2\Delta t} = U + R(\zeta)(1-\bar{\Delta})^2\Delta t + o(\Delta t)^2$$

と展開して, ずらし演算と極限移行を実行すると(4.3)に例えば次のような項が現れる。

$$\int_0^t e^{P(s)(t-t')} (-s\varepsilon) Q_0 dt' \int_0^{t'} e^{P(s-1)(t'-t'')} Q_0 dt''$$

$$\times \left( -\frac{E_s^2 \zeta^2}{4} \right) e^{P(s-3)t''} \mathfrak{M}_0(s-3) = A'.$$

5.1. メリン逆変換と  $s$  の原点移動

$A'$  にメリン逆変換を施す ( $A$  と記す)。このとき  $s$  の原点を項別にずらすことができる。7.7)  $s \rightarrow s+3$  とすると,

$$A = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{ds}{E^{s+1}}$$

$$\times \int_0^t e^{P(s+3)(t-t')} \left( -(s+3) \frac{\varepsilon}{E} \right) Q_0 dt'$$

$$\times \int_0^{t'} e^{P(s+2)(t'-t'')} \left( -\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2} \right) Q_0 dt'' e^{P(s)t''} \mathfrak{M}_0(s).$$

5.2. 第 2 のずらし演算子

原点移動を別のずらし演算子を用いて表現する。  $s$  のどのような関数  $f(s)$

にも前方から後方 (左側) へ演算する差分演算子  $\bar{\Delta}$  を定義する:

$$f(s)\bar{\Delta} = f(s) - f(s+1). \quad (5.1)$$

次式が成り立つ。

$$f(s)(1-\bar{\Delta}) = f(s+1),$$

$$f(s)(1-\bar{\Delta})^n = f(s+n),$$

$$f(s)(1-\bar{\Delta})^m g(s)(1-\bar{\Delta})^n$$

$$= \left( f(s)(1-\bar{\Delta})^{m+n} \right) \left( g(s)(1-\bar{\Delta})^n \right). \quad (5.2)$$

ずらし演算子  $(1-\bar{\Delta})$  を用いると  $A$  は,

$$A = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{ds}{E^{s+1}}$$

$$\times \int_0^t e^{P(s)(t-t')} (-s\varepsilon) Q_0 (1-\bar{\Delta}) dt'$$

$$\times \int_0^{t'} e^{P(s)(t'-t'')} \left( -\frac{E_s^2 \zeta^2}{4} \right) Q_0 (1-\bar{\Delta})^2 dt''$$

$$\times e^{P(s)t''} \mathfrak{M}_0(s). \quad (5.3)$$

演算子の左側の  $E^{-s}$  は演算を受けたあと右側へ移すことができる。このとき(5.3)を次のように表すことができる。

$$A = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{ds}{E}$$

$$\times \int_0^t e^{P(s)(t-t')} \left( -s \frac{\varepsilon}{E} \right) Q_0 (1-\bar{\Delta}) dt'$$

$$\times \int_0^{t'} e^{P(s)(t'-t'')} \left( -\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2} \right) Q_0 (1-\bar{\Delta})^2 dt''$$

$$\times e^{P(s)t''} \left( \begin{matrix} (E_0/E)^s \\ (W_0/E)^s \end{matrix} \right). \quad (5.3)'$$

(5.3)' を一般化すると(4.3)は次のように書き換えることができる。

$$\left( \begin{matrix} f(Z_0, E, \zeta, t) \\ g(Z_0, E, \zeta, t) \end{matrix} \right)_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{ds}{E}$$

$$\times \left( e^{-\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2} (1-\bar{\Delta})^2 Q_0 \Delta t} e^{-\frac{\varepsilon}{E} (1-\bar{\Delta}) (s+1) Q_0 \Delta t} e^{P(s) \Delta t} \right)^n$$

$$\times \left( \begin{matrix} (E_0/E)^s \\ (W_0/E)^s \end{matrix} \right). \quad (5.4)$$

ここで  $\left(-\frac{s\varepsilon}{E}\right)Q_0(1-\bar{\Delta})\Delta t$  を  $-\frac{\varepsilon}{E}(1-\bar{\Delta})(s+1)Q_0\Delta t$  と表した。

2つの行列,

$$\left(-\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2}\right)(1-\bar{\Delta})^2 Q_0 \Delta t \text{ と}$$

$$-\frac{\varepsilon}{E}(1-\bar{\Delta})(s+1)Q_0 \Delta t \text{ は可換である。}$$

可換行列  $A, B$  について  $e^A e^B = e^{A+B}$  と

表すことができるから散乱項と電離損失項とは重ね合わせることができる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} f(Z_0, E, \zeta, t) \\ g(Z_0, E, \zeta, t) \end{pmatrix}_n \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{ds}{E} \\ & \times \left( e^{\left(-\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2}(1-\bar{\Delta})^2 - \frac{\varepsilon}{E}(1-\bar{\Delta})(s+1)\right)Q_0 \Delta t} e^{P(s)\Delta t} \right)^n \\ & \times \begin{pmatrix} (E_0/E)^s \\ (W_0/E)^s \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

### 6. 解の計算

(5.5)において

$$\begin{aligned} & e^{\left(-\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2}(1-\bar{\Delta})^2 - \frac{\varepsilon}{E}(1-\bar{\Delta})(s+1)\right)Q_0 \Delta t} \\ &= U + \left\{ -\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2}(1-\bar{\Delta})^2 \right. \\ & \left. - \frac{\varepsilon}{E}(1-\bar{\Delta})(s+1) \right\} Q_0 \Delta t + \dots \end{aligned}$$

と展開する。

極限移行すれば(5.5)の右辺は

$$\begin{aligned} & e^{P(s)t} + \int_0^t e^{P(s)(t-t')} \\ & \times \left( -\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2}(1-\bar{\Delta})^2 - \frac{\varepsilon}{E}(1-\bar{\Delta})(s+1) \right) \\ & \times Q_0 e^{P(s)t'} dt' + \dots \end{aligned}$$

となる。

第3項以降に出現する項数は次数に関して2の累乗で増大していく。カスケード粒子の辿る経路は世代とともに多岐にわたり錯綜していく。散乱項と電離損失項が重ね合わされた(5.5)はカスケード過程を正しく記述するが、2つの過程が並列する重ね合わせは高次での項数増大のため計算に適すとはいえない。そこで重ね合わせを修正し、散乱過程と電離損失過程が直列した樹形モデルを導入する。

#### 6.1. 樹形モデル

樹形モデルは3次元A近似過程に1次元B近似過程を結びつけた形で3次元B近似過程を構成する。すなわち、入射粒子が辿る過程を幹(図1, 黒線)とし幹から生ずる過程を枝(青線)として、幹を3次元A近似散乱過程、枝を1次元B近似電離損失過程とする。幹の電離損失や枝の散乱は考えない。

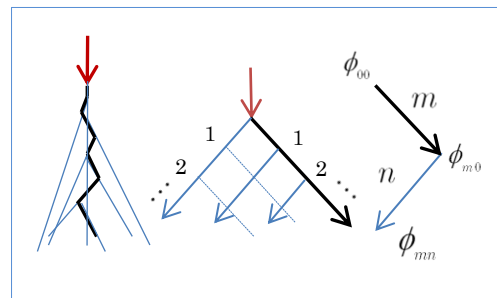


図1 樹形モデル

このモデルの下で  $(f, g)$  は,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} f(Z_0, E, \zeta, t) \\ g(Z_0, E, \zeta, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{ds}{E} \\ & \times \lim_{m, n \rightarrow \infty} \left\{ e^{-\frac{\varepsilon}{E}(1-\bar{\Delta})(s+1)Q_0 \Delta t} e^{P(s) \Delta t} \right\}^n \\ & \times \left( e^{-\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2}(1-\bar{\Delta})^2 Q_0 \Delta t} e^{P(s) \Delta t} \right)^m \begin{pmatrix} (E_0/E)^s \\ (W_0/E)^s \end{pmatrix}, \\ & \Delta t = t/m, \quad t/n. \end{aligned} \quad (6.1)$$

### 6.2. 幹の計算

散乱過程を  $A$  と記す。

【(6.1)におけるメルン逆変換の表示をここでは便宜的に省略する】

$$\begin{aligned} A &= \left( e^{-\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2}(1-\bar{\Delta})^2 Q_0 \Delta t} e^{P(s) \Delta t} \right)^m \\ &= e^{P(s)m \Delta t} \\ &+ \left( -\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2} \right) \sum_{k=1}^m e^{P(s+2)(m-k) \Delta t} Q_0 e^{P(s)k \Delta t} \Delta t \\ &+ \left( -\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2} \right)^2 \sum_{k=1}^m \sum_{k'=1}^k e^{P(s+4)(m-k) \Delta t} \Delta t \\ &\times Q_0 e^{P(s+2)(k-k') \Delta t} Q_0 e^{P(s)k' \Delta t} \Delta t + \dots \\ & \text{【極限移行する】} \\ &= e^{P(s)t} \\ &+ \left( -\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2} \right) \int_0^t e^{P(s+2)(t-t')} Q_0 e^{P(s)t'} dt' + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2} \right)^m \phi_{m0}(s, t), \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \phi_{m0}(s, t) &= \int_0^t \phi_{00}(s+2m, t-t') \\ &\times Q_0 \phi_{m-10}(s, t') dt', \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\phi_{00}(s, t) = e^{P(s)t}. \quad (6.4)$$

### 6.3. ラプラス変換

$\phi_{m0}(s, t)$  をラプラス変換する。<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{m0}(s, \alpha) &= \int_0^{\infty} dt e^{-\alpha t} \phi_{m0}(s, t) \\ &= \int_0^{\infty} dt e^{-\alpha t} \\ &\times \int_0^t dt' \phi_{00}(s+2m, t-t') Q_0 \phi_{m-10}(s, t') \\ & \text{【積分順序を変更し } t-t' = \tau \text{ とおく】} \\ &= \int_0^{\infty} dt' e^{-\alpha t'} \\ &\times \left( \int_0^{\infty} d\tau e^{-\alpha \tau} \phi_{00}(s+2m, \tau) \right) Q_0 \phi_{m-10}(s, t') \\ &= \mathfrak{L}_{00}(s+2m, \alpha) Q_0 \mathfrak{L}_{m-10}(s, \alpha) \\ &= \mathfrak{L}_{00}(s+2m, \alpha) \\ &\times \left( \prod_{k=1}^{m-1} Q_0 \mathfrak{L}_{00}(s+2k, \alpha) \right) Q_0 \mathfrak{L}_{00}(s, \alpha). \end{aligned}$$

しかるに  $Q_0 = Q_0^2$  が成り立つ。

$Q_0$  を  $Q_0^2$  で置き換えると

$\mathfrak{L}_{00}(s+2k, \alpha)$  を両側から  $Q_0$  で挟むことができる。

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{m0}(s, \alpha) &= \mathfrak{L}_{00}(s+2m, \alpha) Q_0 \\ &\times \left( \prod_{k=1}^{m-1} Q_0 \mathfrak{L}_{00}(s+2k, \alpha) Q_0 \right) \\ &\times Q_0 \mathfrak{L}_{00}(s, \alpha) \\ &= \left( \prod_{k=1}^{m-1} a(s+2k, \alpha) \right) \\ &\times \begin{pmatrix} a(s+2m, \alpha) & 0 \\ c(s+2m, \alpha) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(s, \alpha) & b(s, \alpha) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$a(s, \alpha) = \frac{\alpha + \sigma_0}{(\alpha - \lambda_1(s))(\alpha - \lambda_2(s))},$$

$$b(s, \alpha) = \frac{B(s)}{(\alpha - \lambda_1(s))(\alpha - \lambda_2(s))},$$

$$c(s, \alpha) = \frac{C(s)}{(\alpha - \lambda_1(s))(\alpha - \lambda_2(s))}.$$

( $a(s, \alpha)$  を第 III 稿 § 2.3 で導く)

#### 6.4. 枝の計算

電離損失過程を  $B$  と記す。

幹の  $\phi_{m0}(s, t)$  が  $B$  の初期値となる。

【(6.1)におけるメリン逆変換の表示をここでは便宜的に省略する】

$$B = \left( e^{-\frac{\varepsilon}{E}(1-\bar{\lambda})(s+2m+1)Q_0\Delta t} e^{P(s+2m)\Delta t} \right)^n$$

$$= e^{P(s+2m)n\Delta t}$$

$$+ \left( -\frac{\varepsilon}{E} \right) (s+2m+1)$$

$$\times \sum_{k=1}^n e^{P(s+2m+1)(n-k)\Delta t} Q_0 e^{P(s+2m)k\Delta t} \Delta t$$

$$+ \left( -\frac{\varepsilon}{E} \right)^2 (s+2m+2)(s+2m+1)$$

$$\times \sum_{k=1}^n \sum_{k'=1}^k e^{P(s+2m+2)(n-k)\Delta t}$$

$$\times Q_0 e^{P(s+2m+1)(k-k')\Delta t} \Delta t Q_0 e^{P(s+2m)k'\Delta t} \Delta t + \dots$$

【極限移行する】

$$= e^{P(s+2m)t}$$

$$+ (s+2m+1) \left( -\frac{\varepsilon}{E} \right)$$

$$\times \int_0^t e^{P(s+2m+1)(t-t')} Q_0 e^{P(s+2m)t'} dt' + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s+2m+n)}{(s+2m)} \left( -\frac{\varepsilon}{E} \right)^n \phi_{mn}(s, t),$$

(6.5)

$$\phi_{mn}(s, t)$$

$$= \int_0^t \phi_{00}(s+2m+n, t-t')$$

$$\times Q_0 \phi_{mn-1}(s+2m, t') dt'. \quad (6.6)$$

$\phi_{mn}(s, t)$  をラプラス変換する。

前節における計算と同様にして、

$$\mathfrak{L}_{mn}(s, \alpha)$$

$$= \left( \prod_{k=1}^{n-1} a(s+2m+k, \alpha) \right) \left( \prod_{k=1}^m a(s+2k, \alpha) \right)$$

$$\times \begin{pmatrix} a(s+2m+n, \alpha) & 0 \\ c(s+2m+n, \alpha) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(s, \alpha) & b(s, \alpha) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(6.7)

#### 6.5. ラプラス逆変換と主要項近似

ラプラス逆変換：

$$\phi_{mn}(s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta} d\alpha e^{\alpha t} \mathfrak{L}_{mn}(s, \alpha)$$

において  $a(s, \alpha)$  や  $b(s, \alpha)$  の極のうち

$\alpha = \lambda_1(s)$  が最も主要な極である。よっ

て  $\lambda_1(s)$  のみを採用する (主要項近似と

ここで呼ぶ。  $t \geq 2$  なら十分満たされる)。

$\lambda_1(s)$  を含むように積分路  $\delta$  をとる。

$$\phi_{mn}(s, t)$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{(\lambda_1(s) - \lambda_1(s'+k))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s'+k))} \right\}$$

$$\quad | s' = s + 2m$$

$$\times \prod_{k=1}^m \left\{ \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{(\lambda_1(s) - \lambda_1(s+2k))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s+2k))} \right\} \times$$



$$\times \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{(\lambda_1(s) - \lambda_1(s'))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s'))} & 0 \\ \frac{C(s')}{(\lambda_1(s) - \lambda_1(s'))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s'))} & 0 \end{pmatrix} \Big|_{s' = s + 2m + n}$$

$$\times \begin{pmatrix} H_1(s) & \frac{B(s)}{(\lambda_1(s) - \lambda_2(s))} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{\lambda_1(s)t} . \tag{6.8}$$

(6.8)の4つの過程は図2に示すような構造である(図中  $a, b, c$  は,  $a: e \rightarrow e$ ,  $b: \gamma \rightarrow e$ ,  $c: e \rightarrow \gamma$  を示す)。

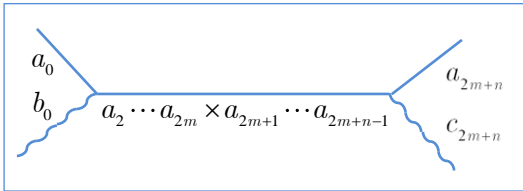


図2  $\phi_{mn}(s, t)$  の4過程

$\phi_{mn}(s, t)$ , (6.8), に  $(-E_s^2 \zeta^2 / 4E^2)^m$  と  $(-\varepsilon/E)^n (s + 2m + n)! / (s + 2m)!$  を乗じて和をとりメルン逆変換を施せば  $(f, g)$  を得る。

$$\begin{pmatrix} f(Z_0, E, \zeta, t) \\ g(Z_0, E, \zeta, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{ds}{E^{s+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2} \right)^m \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s + 2m + n)!}{(s + 2m)!} \left( -\frac{\varepsilon}{E} \right)^n \phi_{mn}(s, t) \begin{pmatrix} E_0^s \\ W_0^s \end{pmatrix} . \tag{6.9}$$

## 7. 入射電子の創る電子成分

カスケード中の電子成分  $f$  は入射電子の創る電子成分と入射光子の創る電子成分との重ね合わせであることを(6.9)は示す。光子成分  $g$  も同様

$$(e + \gamma \rightarrow f, e + \gamma \rightarrow g) .$$

ここ以降では入射電子の創る電子成分のみを対象にする( $e \rightarrow f$ )。

このとき  $f$  は次のように表される。

$$\begin{aligned} f(E_0, E, \zeta, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \left( \frac{E_0}{E} \right)^s \frac{ds}{E} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2} \right)^m \sigma_m(s) \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s + 2m + n)!}{(s + 2m)!} \left( -\frac{\varepsilon}{E} \right)^n \rho_n(s + 2m) . \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned} \sigma_m(s) &= \prod_{k=1}^m \left\{ \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_1(s + 2k)} \right. \\ &\times \left. \frac{1}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s + 2k)} \right\} \end{aligned} \tag{7.2}$$

は散乱過程を,

$$\begin{aligned} \rho_n(s + 2m) &= \prod_{k=1}^n \left\{ \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_1(s + 2m + k)} \right. \\ &\times \left. \frac{1}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s + 2m + k)} \right\} \end{aligned} \tag{7.3}$$

は電離損失過程をそれぞれ記述する。

### 7.1. 二重和における $\rho_n(s + 2m)$ の $m, n$ 分離

$\rho_n(s+2m)$  が  $m$  の部分と  $n$  の部分  
 とに分離できれば(7.1)の 2 重和が求め  
 られる。これを検討する。  
 先ず,

$$\rho_n(s+2m) = \rho_{2m+n}(s) / \rho_{2m}(s) \quad (7.4)$$

と表すことができる。ここに

$$\begin{aligned} \rho_{2m+n}(s) &= \prod_{k=1}^{2m+n} \left\{ \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_1(s+k)} \right. \\ &\times \left. \frac{1}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s+k)} \right\}, \\ \rho_{2m}(s) &= \prod_{k=1}^{2m} \left\{ \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_1(s+k)} \right. \\ &\times \left. \frac{1}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s+k)} \right\}. \end{aligned}$$

次に,  $\prod_{k=1}^{2m+n} = \prod_{k=n+1}^{2m+n} \times \prod_{k=1}^n$  の関係が成り立つ。

さらに, (7.1)における係数

$$\frac{(s+2m+n)!}{(s+2m)!} \text{ を } \binom{s+2m+n}{n} \times n! \text{ と表す}$$

と  $n! \rho_{2m+n}(s)$  という量が現れる。そこで

$n! \rho_n(s)$  なる量を考える。これは第Ⅲ

稿 § 3.4(i)に与える数値やグラフからわ  
 かるように大きな  $n$  について重要にな

る。  $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{2m+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n$  であるから, 大

きな  $n$  について  $\prod_{k=1}^{2m+n} \simeq \prod_{k=1}^n$  とみなし,

$n! \rho_{2m+n}(s)$  に対して  $n! \rho_n(s)$  を代用す

る。このとき 2 重和  $S$  は各々の和が求  
 められる形になる。すなわち

$$\begin{aligned} S &\simeq \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{E_s^2 \zeta^2}{4E^2} \right)^m \frac{\sigma_m(s)}{\rho_{2m}(s)} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+2m+n}{n} \left( -\frac{\varepsilon}{E} \right)^n n! \rho_n(s). \quad (7.5) \end{aligned}$$

## 7.2. Prony 法と Dirichlet 級数を用いた 2 重和の計算

(7.5)の  $m, n$  に関する和を計算する。

### 7.2.1. $n$ の和—Prony 法の適用

Prony 内挿法<sup>8)</sup>の手法を用いて

$$n! \rho_n(s) = \sum_{j=1}^N D_j(s) \beta_j(s)^n \quad (7.6)$$

と表す。  $2N$  個の  $D_j(s), \beta_j(s), (j=1,$

$\dots, N)$  は  $2N$  個の既知数  $n! \rho_n(s)$

( $n=0, \dots, 2N-1$ ) から一意的に定まる。

(7.5)の第 2 の和を  $S_1$  と表す。

$$S_1 = \sum_{j=1}^N D_j(s) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+2m+n}{n} \left( -\frac{\varepsilon \beta_j(s)}{E} \right)^n.$$

$\varepsilon \beta_j(s) / E < 1$  のとき  $n$  の和が存在する。

条件を満たすように  $E$  を大きくとると,

$$S_1 = \sum_{j=1}^N \frac{D_j(s)}{(1 + \varepsilon \beta_j(s) / E)^{s+2m+1}}.$$

分母における分数は(7.1)の右辺に在る

$E^{-s-2m-1}$  と相俟って分子と分母が分離

した形になる。すなわち

$$\begin{aligned} &f(E_0, E, \zeta, t) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_c E_0^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{j=1}^N \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{E_s^2 \zeta^2}{4(E + \varepsilon \beta_j(s))^2} \right)^m \frac{\sigma_m(s)}{\rho_{2m}(s)} \\ & \times \frac{D_j(s)}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^{s+1}}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

ここで大きな  $E$  という条件は解除できる。以降で極限 ( $E \rightarrow 0$ ) が可能となる。

### 7.2.2. $m$ の和—Dirichlet 級数の適用

(7.7) の  $m$  の和は、ベキ級数の一般化ともみなされる Dirichlet 級数<sup>9)</sup> で表す

ことができる。 $m$  の和を  $S_2$  と記す。

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( -\frac{E_s^2 \zeta^2}{4(E + \varepsilon \beta_j(s))^2} \right)^m \frac{\sigma_m(s)}{\rho_{2m}(s)} \\ &= \sum_{i=1}^M C_i(s) e^{-\frac{\alpha_i(s) E_s^2 \zeta^2}{4(E + \varepsilon \beta_j(s))^2}}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

指数部分を展開して辺々比較すれば

$$\sum_{i=1}^M C_i(s) \alpha_i(s)^m = m! \sigma_m(s) / \rho_{2m}(s).$$

これは Prony 法の手法で用いた(7.6)と同じ構造である。<sup>※), ※※)</sup> よって  $2M$  個

-----  
<sup>※)</sup> Prony 内挿法は Dirichlet 級数を用いて補間する方法である。<sup>8)</sup>

$$\text{※※)} \quad f(\zeta) = \sum_m a_m (b\zeta^2)^m$$

$$= \sum_m m! a_m (b\zeta^2)^m / m!,$$

$$m! a_m = \sum_i C_i \alpha_i^m \Rightarrow f(\zeta) = \sum_i C_i e^{\alpha_i b \zeta^2}.$$

Prony 法と Dirichlet 級数法とは等価である。

の  $C_i(s), \alpha_i(s), (i=1, \dots, M)$  は  $2M$

個の既知数  $m! \sigma_m(s) / \rho_{2m}(s), (m=0, 1, \dots, 2M-1)$  から一意的に定まる。

(7.7), (7.8) から,

$$\begin{aligned} f(E_0, E, \zeta, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c E_0^s ds H_1(s) e^{\lambda(s)t} \\ & \times \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{C_i(s) D_j(s)}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^{s+1}} e^{-\frac{\alpha_i(s) E_s^2 \zeta^2}{4(E + \varepsilon \beta_j(s))^2}}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

## 8. 角分布関数

### 8.1. 数式の導出

(7.9) をハンケル変換すれば角分布関数微分型  $\pi_1(E_0, E, \theta, t)$  が求められる。

$$\begin{aligned} \pi_1(E_0, E, \theta, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(E_0, E, \zeta, t) J_0(\theta \zeta) \zeta d\zeta. \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-at^2} J_0(bt) t dt = (1/2a) e^{-b^2/4a} \quad (8.2)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \pi_1(E_0, E, \theta, t) &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_c E_0^s ds H_1(s) e^{\lambda(s)t} \\ & \times \frac{2}{E_s^2} \sum_{i=1}^M \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)} \\ & \times \sum_{j=1}^N \frac{D_j(s)}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^{s-1}} e^{-\frac{(E + \varepsilon \beta_j(s))^2 \theta^2}{\alpha_i(s) E_s^2}}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

積分型  $\Pi_1$  は

$$\Pi_1(E_0, E, \theta, t) = \int_E^{E_0} \pi_1(E_0, E, \theta, t) dE.$$

(8.3) のエネルギーに関する積分は第 2 種不完全ガンマ関数<sup>10)</sup> に至る :

$$\int_x^\infty t^a e^{-t} dt = \Gamma(a+1, x). \quad (8.4)$$

したがって、

$$\begin{aligned} & \Pi_1(E_0, E, \theta, t) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_c \left( \frac{E_0 \theta}{E_s} \right)^s \frac{ds}{\theta^2} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ & \times \sum_{i=1}^M \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}} \sum_{j=1}^N D_j(s) \\ & \times \left\{ \Gamma \left( -\frac{s}{2} + 1, \frac{(E + \varepsilon \beta_j(s))^2 \theta^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right) \right. \\ & \left. - \Gamma \left( -\frac{s}{2} + 1, \frac{(E_0 + \varepsilon \beta_j(s))^2 \theta^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right) \right\}. \quad (8.5) \end{aligned}$$

### 8.2. A 近似式と B 近似式

角分布関数の A, B 近似式を導く。※

#### 8.2.1. A 近似式

$\varepsilon \ll E \ll E_0$  のエネルギーを対象とする。  
 (8.5) で  $\varepsilon = 0$  とみなすと、

$$\begin{aligned} & \Pi_1(E_0, E, \theta, t) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_c \left( \frac{E_0 \theta}{E_s} \right)^s \frac{ds}{\theta^2} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ & \times \sum_{i=1}^M \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}} \\ & \times \left\{ \Gamma \left( -\frac{s}{2} + 1, \frac{1}{\alpha_i(s)} \left( \frac{E \theta}{E_s} \right)^2 \right) \right. \\ & \left. - \Gamma \left( -\frac{s}{2} + 1, \frac{1}{\alpha_i(s)} \left( \frac{E_0 \theta}{E_s} \right)^2 \right) \right\}. \quad (8.6) \end{aligned}$$

※) 電磁カスケード理論において電離損失を無視する理論を A 近似理論、考慮する理論を B 近似理論と呼ぶ。

ここで恒等式  $\sum_{j=1}^N D_j(s) = 1$  を用いた。

#### 8.2.2. B 近似式 (エネルギー閾値ゼロ)

(8.5) で  $E \rightarrow 0$  とする。かつ、 $\varepsilon \ll E_0$  を考慮すると、

$$\begin{aligned} & \Pi_1(E_0, 0, \theta, t) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_c \left( \frac{E_0 \theta}{E_s} \right)^s \frac{ds}{\theta^2} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ & \times \sum_{i=1}^M \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}} \sum_{j=1}^N D_j(s) \\ & \times \left\{ \Gamma \left( -\frac{s}{2} + 1, \frac{\beta_j(s)}{\alpha_i(s)} \left( \frac{\varepsilon \theta}{E_s} \right)^2 \right) \right. \\ & \left. - \Gamma \left( -\frac{s}{2} + 1, \frac{1}{\alpha_i(s)} \left( \frac{E_0 \theta}{E_s} \right)^2 \right) \right\}. \quad (8.7) \end{aligned}$$

### 8.3. 角分布関数の体積

角分布関数(8.5)の体積は1次元遷移曲線を与えなければならない。それを確認する。

$$\int_0^\infty \Pi_1(E_0, E, \theta, t) 2\pi\theta d\theta = V(E_0, E, t)$$

と記す。

$$\int_0^\infty x^\mu \Gamma(\nu, x) dx = \frac{(\mu + \nu)!}{\mu + 1}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} V(E_0, E, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c E_0^s \frac{ds}{s} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ & \times \sum_{j=1}^N D_j(s) \left\{ \frac{1}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^s} - \frac{1}{(E_0 + \varepsilon \beta_j(s))^s} \right\}. \quad (8.8) \end{aligned}$$

ここで恒等式  $\sum_{i=1}^M C_i(s) = 1$  を用いた。

(i) A 近似の場合

(8.7)において  $\varepsilon = 0$  とおく。  $E \ll E_0$  お

よび  $\sum D_j(s) = 1$  を考慮すると,

$$V(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \left( \frac{E_0}{E} \right)^s \frac{ds}{s} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t}.$$

よく知られた A 近似遷移曲線を得る。

(ii) B 近似の場合

(8.8) において  $E \rightarrow 0$  とし,  $\varepsilon \ll E_0$  を考慮すると,

$$V(E_0, 0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \left( \frac{E_0}{\varepsilon} \right)^s \frac{ds}{s} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \times \sum_{j=1}^N D_j(s) \beta_j(s)^{-s}.$$

然るに  $\sum_j D_j(s) \beta_j(s)^{-s}$  は Greisen

の  $K$  関数,  $K_1(s, -s)$ , に等しい (補遺に示す)。よって,

$$V(E_0, 0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \left( \frac{E_0}{\varepsilon} \right)^s \frac{ds}{s} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} K_1(s, -s).$$

よく知られた B 近似遷移曲線を得る。角分布関数の体積は A 近似, B 近似とも 1 次元遷移曲線を正確に与えることが確認された。

参考文献

1) L.D.Landau, *Collected Papers of Landau*, ed. D ter Haar, Pergamon

Press(1965).

2) J.Nishimura, *Handbuch der Physik* XLVI/2(1967), 1.

3) *数学公式III*(岩波書店, 1994).

4) B.Rossi and K.Greisen, *Rev.Mod.Phys.* 13(1941), 240.

5) H.F.Trotter, *Proc.Amer.Math.Phys.Soc.* 10(1959), 545.

6) M.Suzuki, *Commun.Math.Phys.* 51(1976), 183.

7) H.J.Bhabha, F.R.S.Chakrabarty, *Proc.Roy.Soc.London(Ser.A, Math.and Phys.)* 181(1943), 267.

7)' 新居誠彦, 足利大学研究集録第 56 号 (2021.3), p.21 に 7) の補足を示している。

8) 日高孝次, *数値積分法*(岩波書店, 1942).

9) 森口, 宇田川, 一松, *数学公式II*(岩波全書, 1957).

10) 前掲, *数学公式III*(岩波全書 1994).

補遺

$$\sum_{j=1}^N D_j(s) \beta_j(s)^{-s} = K_1(s, -s)$$

の証明

はじめに

(1)  $K_1(s, -s)$  は次の漸化式によって定義される。<sup>4)</sup>

$$\left[ \lambda_1(s) + A(s+r) - \frac{B(s+r)C(s+r)}{\lambda_1(s) + \sigma_0} \right] \times K_1(s, r) = r K_1(s, r-1), \quad \} (A1)$$

$$K_1(s, 0) = 1.$$

(2) 関数  $\lambda_1(s), \lambda_2(s)$  は第 III 稿 § 2 から,

$$\lambda_1(s) = \frac{1}{2}[-A(s) - \sigma_0 + \sqrt{(A(s) - \sigma_0)^2 + 4B(s)C(s)}],$$

$$\lambda_2(s) = \frac{1}{2}[-A(s) - \sigma_0 - \sqrt{(A(s) - \sigma_0)^2 + 4B(s)C(s)}].$$

次の関係式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \lambda_1(s) + \lambda_2(s) &= -A(s) - \sigma_0, \\ (\lambda_1(s) + A(s))(\lambda_1(s) + \sigma_0) &= B(s)C(s). \end{aligned}$$

(3) 漸化式左辺の関数は,

$$\begin{aligned} B(s+r)C(s+r) &= (\lambda_1(s+r) + A(s+r))(\lambda_1(s+r) + \sigma_0), \\ A(s+r) + \sigma_0 &= -\lambda_1(s+r) - \lambda_2(s+r) \end{aligned}$$

を用いて, 次のように変形できる。

$$\begin{aligned} &\frac{(\lambda_1(s) - \lambda_1(s+r))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s+r))}{\lambda_1(s) + \sigma_0} \\ &\times K_1(s, r) = rK_1(s, r-1). \end{aligned} \quad (A2)$$

(4) 1次元電離損失過程を記述する量;

$$\begin{aligned} \rho_n(s) &= \prod_{k=1}^n \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{(\lambda_1(s) - \lambda_1(s+k))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s+k))}, \\ \rho_0(s) &= 1. \end{aligned} \quad \} (A3)$$

を § 7 で導いた ((7.3),  $m=0$ )。かつ, Prony 法の手法を適用して

$$n! \rho_n(s) = \sum_{j=1}^N D_j(s) \beta_j(s)^n \quad (A4)$$

と表した (§ 7.2.1)。

(A3)を漸化式で表せば,

$$\begin{aligned} \rho_n(s) &= \frac{(\lambda_1(s) + \sigma_0) \times \rho_{n-1}(s)}{(\lambda_1(s) - \lambda_1(s+n))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s+n))}. \end{aligned}$$

### 本論

(1) 整数  $n=0, 1, 2, \dots$  について,

$$n! \rho_n(s) = y_n(s) \quad (A5)$$

と記すと,

$$\begin{aligned} y_n(s) &= \frac{n(\lambda_1(s) + \sigma_0) \cdot y_{n-1}(s)}{(\lambda_1(s) - \lambda_1(s+n))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s+n))}. \end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{aligned} &\frac{(\lambda_1(s) - \lambda_1(s+n))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s+n))}{\lambda_1(s) + \sigma_0} \\ &\times y_n(s) = n y_{n-1}(s), \\ &y_0(s) = 1. \end{aligned} \quad \} (A6)$$

この漸化式は  $K_1(s, r)$  の漸化式と同じ

である。よって,

$$\sum_{j=1}^N D_j(s) \beta_j(s)^n = y_n(s) = K_1(s, n). \quad (A7)$$

かつ,  $\sum_{j=1}^N D_j(s) = 1$  (恒等式) から境界

条件  $K_1(s, 0) = 1$  が満たされる。

(2) 負の整数  $r = -1, -2, \dots$  について,

$$\begin{aligned} &K_1(s, r-1) \\ &= \frac{(\lambda_1(s) - \lambda_1(s+r))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s+r))}{r(\lambda_1(s) + \sigma_0)} \\ &\times K_1(s, r) \end{aligned} \quad (A8)$$

から,

$$\begin{aligned}
 & K_1(s, -1) \\
 &= \frac{(-\lambda'_1(s))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s))}{(\lambda_1(s) + \sigma_0)} K_1(s, 0) \\
 &= -\frac{\lambda'_1(s)}{H_1(s)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & K_1(s+1, -2) \\
 &= (-1) \frac{(\lambda_1(s+1) - \lambda_1(s))(\lambda_1(s+1) - \lambda_2(s))}{(\lambda_1(s+1) + \sigma_0)}
 \end{aligned}$$

$$\times K_1(s+1, -1),$$

$K_1(s+2, -3), \dots$  と、順次求められる。

$y_{n-1}(s)$  は(A8)と同形であるから

$y_{-1}(s), y_{-2}(s), \dots$  も順次得られる。

$$\therefore \sum_{j=1}^N D_j(s) \beta_j(s)^{-n} = y_{-n}(s) = K_1(s, -n). \tag{A9}$$

$K_1(s, -s)$  は既知の値  $K_1(s, -r)$  を補間

して求める。 $y_{-s}(s)$  も既知の値  $y_0(s)$ ,

$y_{-1}(s), \dots$  の補間から求められる。

$$\therefore y_{-s}(s) = K_1(s, -s). \tag{A10}$$

**結 び**

(A7), (A10)より

$$\sum_{j=1}^N D_j(s) \beta_j(s)^{-s} = K_1(s, -s).$$

証明完。

※ 足利大学名誉教授

**あとがき**

$\sum_{j=1}^N D_j(s) \beta_j(s)^n$  の  $n$  を  $-s$  へ外挿す

れば  $K_1(s, -s)$  の値が原理的に得られる。

しかし Prony 内挿法が「外挿」に適す

るとは限らない。実際  $K_1(1, -1)$  を  $N=13$

として求めたところ Rossi-Greisen の与

えた値 2.29 に対して 2.19 であった。  
-4.5% の相対誤差は大きいと著者は考

える。  
 $K_1(s, -s)$  の値は外挿からではなく

Prony 内挿法を用いて求めることができ

る。本稿の内容に直接かかわることではな

いけれどもそれを次に記す。

既知の値 ;  $y_0 = 1, y_{-1} = 2.28945, y_{-2} = 3.45191,$

$y_{-3} = 5.98513$  が  $K_1(n, -n)$  を与える。

$$(n!)^2 K_1(n, -n) = \sum_{k=1}^4 a_k b_k^n$$

と表す。 $a_k, b_k$  は表の通り。

|    |                |    |           |
|----|----------------|----|-----------|
| a1 | 9.1892844.E-01 | b1 | 1.5044994 |
| a2 | 7.9033803.E-02 | b2 | 10.484590 |
| a3 | 2.0296637.E-03 | b3 | 38.168013 |
| a4 | 8.0924889.E-06 | b4 | 101.21355 |

内挿値は  $0 \leq s \leq 3$  の範囲で

$$K_1(s, -s) = \sum_{k=1}^4 a_k b_k^s / \Gamma^2(s+1)$$

として求められる。