3 次元電磁カスケード B 近似理論
大気密度を考慮したラテラル分布関数の計算
Ⅳ．ラテラル分布関数の計算

新 居 誠 彦※

A Calculation of Lateral Distribution Function under Approximation B
in Three Dimensional Electron - Photon Cascade Theory,
by Taking the Atmospheric Density into Consideration.
Ⅳ．Calculation of Lateral Distribution Function
Taked the Atmospheric Density into Consideration.

NII Nobuhiko

Abstract

We calculate the lateral distribution function under Approximation B in the three-dimensional cascade theory, by taking the atmospheric density into consideration.

In the theory, there appear two types of recurrence formula; the one is in the three-dimensional scattering process, and the other in the one-dimensional ionization-loss process. We calculate these formulae.

Keywords : three-dimensional cascade theory, electron number lateral distribution function, atmospheric density, diffusion equation for inhomogeneous material.

1.　はじめに

前稿で得た非均質媒質拡散方程式の解(f,g)を基に，大気に入射した電子の創る電子成分(e→e)のラテラル分布関数を主要項近似※) のもとで計算する。

2.　入射電子の創る電子成分ラテラル分布関数

入射電子の創る電子成分(e→e)のラテラル分布関数微分形 π_2 は後の(2.1)に示す $f\left(E_0,E,x,t\right)$ のハンケル変換から得られる。

$$\pi_2\left(E_0,E,\ell,t\right)$$
$$=\int_0^\infty f\left(E_0,E,x,t\right)J_0\left(\ell x\right)xdx.$$

積分形はこれをエネルギーで積分して

$$\Pi_2\left(E_0,E,\ell,t\right)$$
$$=\int_E^{E_0}\pi_2\left(E_0,E,\ell,t\right)dE.$$

第Ⅲ稿(6.2)，$\phi_{mn}\left(s,t\right)$，の計算は補遺 A2

※) $\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$ を含む項のみを採用し $\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t},\mathrm{e}^{\lambda_i(s')t}\ \left(s'>s,i=1,2\right)$ を捨てる近似。$t\gtrsim 2$ なら十分可能。

に示す。その結果から f は次のように表される。

$$f\left(E_0,E,x,t\right)$$
$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{ds}{E}H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{E_s{}^2}{4E^2}\frac{x^2}{\rho\left(z\left(t\right)\right)^2}\right)^m\sigma_m\left(s\right)$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n\binom{s+2m+n}{n}n!\rho_n\left(s+2m\right)\ . \tag{2.1}$$

3. $\rho_n\left(s+2m\right)$ の m,n 分離

(2.1)の 2 重和が求められるためには関数 $\rho_n\left(s+2m\right)$ において変数 m と添字 n との分離が必要である。それには課題が 2 つある。$\rho_n\left(s+2m\right)$ に含まれる，大気密度に由来する因子が散乱の次数 m に依存することと，$\rho_n\left(s+2m\right)$ 自体の関数形である。

(i) 大気密度由来の因子

この因子 $2mc$ は補遺 A2 でみるように，

$$\sum_{i=1,2}\frac{H_i(s+2m+n)}{\lambda_1\left(s\right)-\lambda_i\left(s+2m+n\right)-2mc}$$
$$=a\left(m,n,s,c\right)$$

の形で存在する。c の値は第Ⅱ稿図 4 に示したように，$c\simeq\left(8\sim 9\right)\times 10^{-5}\,\mathrm{cm^2/g}$.

数値を検討する。例えば $s=1$，$n=1, m=5$，$c=9\times 10^{-5}\,\mathrm{cm^2/g}$ とすると，$a\left(5,1,1,c\right)=0.29029$. 因子を省略すれば $a\left(5,1,1,0\right)=0.29021$. 相対誤差は 3×10^{-2} %程度。よってこの因子は他の量に比べて重要でなく，省略して差し支えない。※)

(ii) $\rho_n\left(s+2m\right)$ の関数形

因子 $2mc$ を省略すると $\rho_n\left(s+2m\right)$ は次のように表される：[5)]

$$\rho_n\left(s+2m\right)=\rho_{2m}\left(s+n\right)\rho_n\left(s\right)/\rho_{2m}\left(s\right).$$

このとき，

$$\rho_{2m}\left(s+n\right)\rho_n\left(s\right)\to\rho_n\left(s\right)\left(n\to\infty\right),$$

および $n!\rho_n\left(s\right)$ は $n\to$ 大で重要となる。

この理由から $n!\rho_n\left(s+2m\right)$ に $n!\rho_n\left(s\right)/\rho_{2m}\left(s\right)$ を代用する。

4　2 重和 S

上の議論から $\rho_n\left(s+2m\right)$ の m,n 分離ができ，2 重和 S が求められる形になる。

$$S=\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{E_s{}^2}{4E^2}\frac{x^2}{\rho\left(z\left(t\right)\right)^2}\right)^m\frac{\sigma_m\left(s\right)}{\rho_{2m}\left(s\right)}$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n\binom{s+2m+n}{n}n!\rho_n\left(s\right). \tag{4.1}$$

※) $\sigma_m\left(s\right)$ に含まれる因子 $2mc$（補遺 A1）も同じ理由から省略して差し支えない。

大気密度の変化がシャワーの縦方向の発達に及ぼす影響は微小である。

(4.1)を計算する。

(i) n の和

Prony 法[6] を用いて

$$n!\rho_n(s)=\sum_{j=1}^{N}D_j(s)\beta_j(s)^n \qquad (4.2)$$

と表す。

$2N$ケの量 $D_j(s),\beta_j(s)\ (j=1,2,\cdots,N)$

は $2N$ケの既知数 $n!\,\rho_n(s)$ から一意的に

定まる $(n=0,1,\cdots,2N-1)$.

$$\sum_{j=1}^{N}D_j(s)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s+2m+n}{n}\left(-\frac{\varepsilon\beta_j(s)}{E}\right)^n$$
$$=S'.$$

和の存在条件は $\varepsilon\beta_j(s)/E<1$ である。

条件を満たすように E を十分大きくとる。

$$S'=\sum_{j=1}^{N}\frac{D_j(s)}{\left(1+\varepsilon\beta_j(s)/E\right)^{s+2m+1}}.$$

(2.1)に在る因子 $E^{-s-1-2m}$ と相俟って分母

は $\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^{s+2m+1}$ になる。

ここで上の条件は解除でき以降で $E\to 0$ とすることが可能となる。

(ii) m の和

上記の因子を取り込んだあとの m に関する和に，Dirichlet 級数[7] または Prony 法を適用すれば,

$$S=\sum_{i=1}^{M}C_i(s)\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i(s)E_s{}^2x^2}{4\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2\rho(z(t))^2}}, \qquad (4.3)$$

$$\sum_{i=1}^{M}C_i(s)\,\alpha_i(s)^m=m!\,\sigma_m(s)/\rho_{2m}(s). \qquad (4.4)$$

(4.4)は(4.2)と同型だから，$2M$ ケの量

$C_i(s),\alpha_i(s)\,(i=1,2,\cdots,M)$ は $2M$ ケの

既知数 $m!\,\sigma_m(s)/\rho_{2m}(s)$ から一意的に

定まる $(m=0,1,\cdots,2M-1)$.

以上から,

$$f(E_0,E,x,t)$$
$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c E_0{}^s ds\,H_1(s)\,\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\sum_{i=1}^{M}C_i(s)\sum_{j=1}^{N}\frac{D_j(s)}{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^{s+1}}$$
$$\times\mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i(s)E_s{}^2x^2}{4\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2\rho(z(t))^2}}. \qquad (4.5)$$

5.ラテラル分布関数

5.1. 微分形

$f(E_0,E,x,t)$ をハンケル変換すればラテラル分布関数微分形が求められる。

$$\pi_2(E_0,E,\ell,t)$$
$$=\int_0^\infty f(E_0,E,x,t)J_0(\ell x)xdx,$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}J_0(\ell x)xdx=\mathrm{e}^{-\ell^2/4a}/2a$$

だから,

$$\pi_2(E_0,E,\ell,t)$$
$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c E_0{}^s ds\,H_1(s)\,\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\frac{2}{E_s{}^2}\rho(z)^2$$
$$\times\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)}\sum_{j=1}^{N}\frac{D_j(s)}{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^{s-1}}$$
$$\times\mathrm{e}^{-\frac{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2\rho(z(t))^2\ell^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}}. \qquad (5.1)$$

5.2. 積分形

積分形 $\Pi_2\left(E_0,E,\ell,t\right)$ は(5.1)を $\left(E,E_0\right)$ の範囲でエネルギー積分をして，

$$\Pi_2\left(E_0,E,\ell,t\right)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c\left(\frac{E_0\ell}{E_s}\right)^s\rho(z)^s\frac{ds}{\ell^2}$$

$$\times H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}}\sum_{j=1}^{N}D_j(s)$$

$$\times\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2}{\alpha_i(s)E_s^{\,2}}\rho(z)^2\ell^2\right)$$

$$-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{\left(E_0+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2}{\alpha_i(s)E_s^{\,2}}\rho(z)^2\ell^2\right)\},\tag{5.2}$$

$$t=\frac{1}{g}\left(P(z)-P(z_0)\right).\tag{5.3}$$

ここに{　}内の 2 項は第二種不完全ガンマ関数 [8] ； $\Gamma(\alpha+1,x)=\int_x^\infty t^\alpha\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

6.　体積

ラテラル分布関数積分形の体積を求める。

$$V\left(E_0,E,t\right)=\int_0^\infty\Pi_2\left(E_0,E,\ell,t\right)2\pi\ell\,d\ell.$$

$\int_0^\infty x^\alpha\Gamma(\beta,x)dx=\dfrac{(\alpha+\beta)!}{\alpha+1}$ および恒等式 $\sum_{i=1}^{M}C_i(s)=1$ を用いると，

$$V\left(E_0,E,t\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_c E_0^{\,s}\frac{ds}{s}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times\sum_{j=1}^{N}D_j(s)\{\frac{1}{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^s}-\frac{1}{\left(E_0+\varepsilon\beta_j(s)\right)^s}\}.\tag{6.1}$$

2 つの場合を検討する。

(i)　$\varepsilon\to 0$ とする

$$V\left(E_0,E,t\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\{\left(\frac{E_0}{E}\right)^s-1\}\frac{ds}{s}$$

$$\times H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\sum_{j=1}^{N}D_j(s)$$

$$\simeq\frac{1}{2\pi i}\int_c\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{ds}{s}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}.\tag{6.2}$$

よく知られた A 近似遷移曲線が得られる。ここで恒等式 $\sum_{j=1}^{N}D_j(s)=1$ を用いた。

(ii)　$E\to 0$ とする

$$V\left(E_0,0,t\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s\frac{ds}{s}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times\sum_{j=1}^{N}D_j(s)\{\frac{1}{\beta_j(s)^s}-\frac{\varepsilon^s}{\left(E_0+\varepsilon\beta_j(s)\right)^s}\}$$

$$\simeq\frac{1}{2\pi i}\int_c\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s\frac{ds}{s}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}K_1(s,-s).\tag{6.3}$$

よく知られた B 近似ゼロエネルギーの遷移曲線を得る。ここに

$$\sum_{j=1}^{N}D_j(s)\beta_j(s)^{-s}=K_1(s,-s)$$

は Rossi-Greisen の K 関数。[9]

7.　まとめ

(1)　均質媒質に対する 3 次元拡散方程式を，大気密度を考慮した非均質媒質に対する方程式に書き直した（第Ⅱ稿）。

(2)　方程式の解(f,g)を求めた（第Ⅲ稿）。

(3)　解 f から，横拡がりを幾何学的距離 ℓ [m]で表示するラテラル分布関数を導いた。

(4)　大気密度の変化がシャワーの縦方向の発達に及ぼす影響は微小である。

(5) ℓ 表示のラテラル分布関数の体積は A 近似，B 近似とも正しく遷移曲線を与える。すなわち体積は総電子数を正しく記述している。

参考文献

1) B.Rossi and .Greisen,Rev.Mod.Phys. 13(1941),240.
2) M.Suzuki,Commun.Math.Phys.51 (1976),183.
3) H.F.Trotter,Proc.Amer.Math.Soc.10 (1959),545
4) H.Bhabha,F.R.S. and S.K.Chakrabarty, Proc.London(Ser.A,Math.And Phys.)181(1943)267.
5) 新居誠彦, 足利大学研究集録第 56 号, 2021.3)
6) 日高孝治，積分法（第四章）（岩波書店，1942）,67.
7) 数学公式Ⅱ（岩波全書）,(1965).
8) 数学公式Ⅲ（岩波書店）,1994).
9) 新居誠彦，足利大学研究集録第 58 号（2023.3）.

補遺　漸化式の計算

第Ⅲ稿で散乱過程（1 次元 A 近似）と電離損失過程（3 次元 B 近似）を記述する 2 つの漸化式を得た。入射電子の創る電子成分について各過程の漸化式を計算する。

A1. 散乱項の計算

指数行列 $\mathrm{e}^{P(s)t}$ は 4 成分をもつ。入射電子の創る電子成分(e → e)を対象にする場合，(1,1)成分を採用すればよい（第Ⅲ稿補遺）。ここでは $\boldsymbol{\Phi}_{m0}$ はスカラーである。(e → e)の漸化式は,

$$\Phi_{m0}\left(s,\frac{\xi-t}{\rho\left(z(t)\right)},t\right)$$
$$=\int_0^t \phi_{00}\left(s+2m,t-t'\right)\frac{\left(\xi-t'\right)^2}{\rho\left(z\left(t'\right)\right)^2}$$
$$\times\Phi_{m-1\,0}\left(s,\frac{\xi-t'}{\rho\left(z\left(t'\right)\right)},t'\right)dt'. \tag{1}$$

初期条件は,

$$\Phi_{00}\left(s,\frac{\xi-t}{\rho\left(z(t)\right)},t\right)=\phi_{00}\left(s,t\right)$$
$$=\sum_{i=1,2}H_i\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_i(s)t}. \tag{2}$$

高度 z_0 で発生したシャワーを z で記述する。シャワーの進む距離 z_0-z に対応する大気の厚さ t は，$t=\int_{z_0}^{z}\rho\left(z\right)\left(-dz\right)$.

大気密度は t に対して指数関数で表すことができる※)（$z_0 \lesssim 1$km)。

$$\rho\left(z(t)\right)=\rho\left(z(0)\right)\mathrm{e}^{ct},\quad z\left(0\right)=z_0. \tag{3}$$

密度変化の効果は指数関数の形（e^{-2ct}）で漸化式にとり入れられる。$\left(\xi-t\right)^2$ を，指数関数を用いて次のように表す：

$$\left(\xi-t\right)^2=\left(\partial/\partial a\right)^2\mathrm{e}^{a(\xi-t)}\big|_{a=0}.$$

第 1 項は,

$$\Phi_{10}\left(s,\frac{\xi-t}{\rho\left(z(t)\right)},t\right)$$
$$=\sum_{j=1,2}H_j\left(s+2\right)\sum_{i=1,2}H_i\left(s\right)\times$$

※) 第Ⅰ稿(7)，(7)′。

$$\times\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda_j(s+2)(t-t')}\frac{\mathrm{e}^{-2ct'}}{\rho(z_0)^2}$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\right)^2 \mathrm{e}^{a_1(\xi-t')}\,\mathrm{e}^{\lambda_i(s)t'}\,dt'\,|_{a_1=0}\,.$$

積分部分を A_1 と記す。

$$A_1=\frac{1}{\rho(z_0)^2}\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\right)^2$$

$$\times\frac{\mathrm{e}^{\lambda_i(s)t-2ct-a_1(\xi-t)}-\mathrm{e}^{\lambda_j(s+2)t-a_1\xi}}{\lambda_i(s)-\lambda_j(s+2)-2c-a_1}.$$

主要項近似 のもとで上の積分について次の定理が成り立つ。

『(i) 分子第 2 項は無視できる（積分下限の計算は不要である）

(ii) $i=2$ の項は無視できる（初めから $i=1$ の項のみを採用すればよい）

(iii) 分子の微分から $(\xi-t),(\xi-t)^2$ を乗じた項が現れる。計算の最後の段階で $(\xi-t)\to 0$ とするからこれらの項は消滅する（$\mathrm{e}^{-a_1(\xi-t)}$ は，$(\xi-t)=0$ として初めから除いておくことができる）』

よって，

$$A_1=\frac{\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t-2ct}}{\rho(z_0)^2}$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\right)^2\frac{1}{\lambda_1(s)-\lambda_j(s+2)-2c-a_1}\,|_{a_1=0}$$

$$=\frac{1}{\rho(z(t))^2}\frac{2\,\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}}{\left(\lambda_1(s)-\lambda_j(s+2)-2c\right)^3}.$$

ゆえに，

$$\phi_{10}(s,t)=\lim_{(\xi-t)\to 0}\Phi_{10}\left(s,\frac{\xi-t}{\rho(z(t))},t\right)$$

$$=\frac{H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}}{\rho(z(t))^2}\sigma_1(s),$$

$$\sigma_1(s)=\sum_{j=1,2}\frac{2H_j(s+2)}{\left(\lambda_1(s)-\lambda_j(s+2)-2c\right)^3}.$$

$$\Phi_{20}\left(s,\frac{\xi-t}{\rho(z(t))},t\right)$$

$$=\int^t\phi_{00}(s+4,t-t')\frac{(\xi-t')^2}{\rho(z(t'))^2}$$

$$\times\Phi_{10}\left(s,\frac{\xi-t'}{\rho(z(t'))},t'\right)dt'$$

$$=H_1(s)\sum_{k=1,2}H_k(s+4)\sum_{j=1,2}H_j(s+2)$$

$$\times\int^t dt'\,\mathrm{e}^{\lambda_k(s+4)(t-t')}\frac{\mathrm{e}^{-2ct'}}{\rho(z_0)^2}$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial a_2}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\right)^2\mathrm{e}^{a_2(\xi-t')}\int^{t'}\mathrm{e}^{\lambda_j(s+2)(t'-t'')}$$

$$\times\frac{\mathrm{e}^{-2ct''}}{\rho(z_0)^2}\,\mathrm{e}^{a_1(\xi-t'')+\lambda_1(s)t''}\,dt''\,|_{a_1=a_2=0}\,.$$

$$\phi_{20}(s,t)=\lim_{(\zeta-t)\to 0}\Phi_{20}\left(s,\frac{\xi-t}{\rho(z(t))},t\right)$$

$$=\frac{H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}}{\rho(z(t))^4}\sigma_2(s).$$

Φ_{20} の積分部分を A_2 と記す。

$$A_2=\frac{1}{\rho(z_0)^4}\left(\frac{\partial}{\partial a_2}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\right)^2\times$$

$$\times\int^{t} dt'\, \mathrm{e}^{a_2(\xi-t')+\lambda_k(s+4)(t-t')-2ct'}$$

$$\times\int^{t'} \mathrm{e}^{\lambda_j(s+2)(t'-t'')-2ct''+a_1(\xi-t'')+\lambda_1(s)t''} dt''$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}}{\rho\left(z(t)\right)^4}\left(\frac{\partial}{\partial a_2}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\right)^2$$

$$\times\frac{1}{\lambda_1(s)-\lambda_k(s+4)-4c-a_2-a_1}$$

$$\times\frac{1}{\lambda_1(s)-\lambda_j(s+2)-2c-a_1}.$$

ここで略記を導入する。

$$\left.\begin{aligned}
&H_{i_k}=H_{i_k}(s+2k),\\
&\lambda_{1i_k}=\lambda_1(s)-\lambda_{i_k}(s+2k),\\
&\bar{\lambda}_{1i_k}=\lambda_{1i_k}-2kc,\\
&i_k=1,2\ (k=1,2,3,\cdots).
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

このとき，

$$\sigma_2(s)=\sum_{i_2,i_1=1,2}H_{i_2}H_{i_1}$$

$$\times\left(\frac{24}{\bar{\lambda}_{1i_2}^{\ 5}\bar{\lambda}_{1i_1}}+\frac{12}{\bar{\lambda}_{1i_2}^{\ 4}\bar{\lambda}_{1i_1}^{\ 2}}+\frac{4}{\bar{\lambda}_{1i_2}^{\ 3}\bar{\lambda}_{1i_1}^{\ 3}}\right).$$

同様にして，

$$\phi_{30}(s,t)=\frac{H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}}{\rho\left(z(t)\right)^6}\sigma_3(s),$$

$$\sigma_3(s)=\sum_{i_3,i_2,i_1=1,2}H_{i_3}H_{i_2}H_{i_1}$$

$$\times\Big\{\Big(\frac{720}{\bar{\lambda}_{1i_3}^{\ 7}\bar{\lambda}_{1i_2}}+\frac{480}{\bar{\lambda}_{1i_3}^{\ 6}\bar{\lambda}_{1i_2}^{\ 2}}+\frac{288}{\bar{\lambda}_{1i_3}^{\ 5}\bar{\lambda}_{1i_2}^{\ 3}}$$

$$+\frac{144}{\bar{\lambda}_{1i_3}^{\ 4}\bar{\lambda}_{1i_2}^{\ 4}}+\frac{48}{\bar{\lambda}_{1i_3}^{\ 3}\bar{\lambda}_{1i_2}^{\ 5}}\Big)\frac{1}{\bar{\lambda}_{1i_1}}$$

$$\times\Big(\frac{240}{\bar{\lambda}_{1i_3}^{\ 6}\bar{\lambda}_{1i_2}}+\frac{144}{\bar{\lambda}_{1i_3}^{\ 5}\bar{\lambda}_{1i_2}^{\ 2}}+\frac{72}{\bar{\lambda}_{1i_3}^{\ 4}\bar{\lambda}_{1i_2}^{\ 3}}$$

$$+\frac{24}{\bar{\lambda}_{1i_3}^{\ 3}\bar{\lambda}_{1i_2}^{\ 4}}\Big)\frac{1}{\bar{\lambda}_{1i_1}^{\ 2}}$$

$$\times\Big(\frac{48}{\bar{\lambda}_{1i_3}^{\ 5}\bar{\lambda}_{1i_2}}+\frac{24}{\bar{\lambda}_{1i_3}^{\ 4}\bar{\lambda}_{1i_2}^{\ 2}}+\frac{8}{\bar{\lambda}_{1i_3}^{\ 3}\bar{\lambda}_{1i_2}^{\ 3}}\Big)\frac{1}{\bar{\lambda}_{1i_1}^{\ 3}}\Big\}.$$

一般に，

$$\varPhi_{m0}\left(s,\frac{\xi-t}{\rho\left(z(t)\right)},t\right)$$

$$=H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\sum_{i_m,\cdots,i_1=1,2}H_{i_m}\cdots H_{i_1}$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial a_m}\right)^2\cdots\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\right)^2$$

$$\times\frac{1}{a_m+\cdots+a_1+\bar{\lambda}_{1i_m}}$$

$$\times\frac{1}{a_{m-1}+\cdots+a_1+\bar{\lambda}_{1i_{m-1}}}\times\cdots$$

$$\times\frac{1}{a_1+\bar{\lambda}_{1i_1}}\Big|_{a_m=a_{m-1}=\cdots=a_1=0}.\qquad(5)$$

$$\phi_{m0}(s,t)=\lim_{(\xi-t)\to 0}\varPhi_{m0}\left(s,\frac{\xi-t}{\rho\left(z(t)\right)},t\right)$$

$$=\frac{H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}}{\rho\left(z(t)\right)^{2m}}\sigma_m(s).\qquad(6)$$

高次の $\sigma_m(s)$ の表記を省略する。※

A2.　電離損失項の計算

電離損失項を主要項近似の下で計算する。

$$\phi_{mn}(s,t)=\int^{t}\phi_{00}(s+2m+n,t-t')$$

$$\times\phi_{m\,n-1}(s,t')\,dt',\qquad(7)$$

初期条件は，

※) (5)による計算は単純であるが煩雑である。これとは別に，$\sigma_m(s)$ が(5)よりも見通しよく扱える行列表示をかつて著者は示した。[1)] 読者諸賢は参照されたい。

$$\phi_{m0}\left(s,t\right)=H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\,\frac{\sigma_m\left(s\right)}{\rho\left(z\left(t\right)\right)^{2m}}, \qquad (8)$$

$$\phi_{00}\left(s,t\right)=\sum_{i=1,2}H_i\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_i(s)t}.$$

$$\rho\left(z\left(t\right)\right)=\rho\left(z\left(0\right)\right)\mathrm{e}^{ct}. \qquad (9)$$

略記を導入する。

$$\left.\begin{aligned}&H_{j_k}=H_{j_k}\left(s+2m+k\right),\\&\lambda_{1j_k}=\lambda_1\left(s\right)-\lambda_{j_k}\left(s+2m+k\right),\\&j_k=1,2,\ \ k=1,2,3,\cdots.\end{aligned}\right\}\ (10)$$

このとき，

$$\phi_{m1}\left(s,t\right)=H_1\left(s\right)\sigma_m\left(s\right)\sum_{j_1=1,2}H_{j_1}$$

$$\times\sum_{i=1,2}\int^t\mathrm{e}^{\lambda_i(s+2m+1)(t-t')+\lambda_1(s)t'}\frac{\mathrm{e}^{-2mct'}}{\rho\left(z\left(0\right)\right)^{2m}}\,dt'$$

$$=H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\,\frac{\sigma_m\left(s\right)}{\rho\left(z(t)\right)^{2m}}\sum_{j_1=1,2}\frac{H_{j_1}}{\lambda_{1j_1}-2mc}.$$

$$\phi_{m2}\left(s,t\right)=H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\,\frac{\sigma_m\left(s\right)}{\rho\left(z\left(t\right)\right)^{2m}}$$

$$\times\sum_{j_2=1,2}\frac{H_{j_2}}{\lambda_{1j_2}-2mc}\sum_{j_1=1,2}\frac{H_{j_1}}{\lambda_{1j_1}-2mc}.$$

一般項は 2 例から容易に推測できる。

$$\phi_{mn}\left(s,t\right)=H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times\frac{\sigma_m\left(s\right)}{\rho\left(z\left(t\right)\right)^{2m}}\rho_n\left(s+2m\right),$$

$$\rho_n\left(s+2m\right)$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1,2}\frac{H_j\left(s+2m+k\right)}{\lambda_1\left(s\right)-\lambda_j\left(s+2m+k\right)-2mc}\right). \qquad (11)$$

参考文献

1)　新居誠彦，足利大学研究集録第 56 号 (2021.3) ,Ⅲ.

※　足利大学名誉教授

原稿受付日　令和 6 年 1 月 1 日