3 次元電磁カスケード B 近似理論
大気密度を考慮したラテラル分布関数の計算
Ⅲ．非均質媒質の拡散方程式の解

新 居 誠 彦※

A Calculation of Lateral Distribution Function under Approximation B
in Three Dimensional Electron - Photon Cascade Theory,
by Taking the Atmospheric Density into Consideration.
Ⅲ．Solving the Rewritten Three-Dimensional Diffusion Equation.

NII Nobuhiko

Abstract

We solve the diffusion equation for inhomogeneous material.

Keywords : three-dimensional cascade theory, electron number lateral distribution function, Approximation B, atmospheric density, diffusion equation for inhomogeneous material.

1. はじめに

非均質媒質（大気）に対する 3 次元拡散方程式を第Ⅱ稿で導いた。ここではその解を求める。

2. 非均質媒質拡散方程式の解

大気密度を考慮した非均質媒質の 3 次元拡散方程式は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\vec{\theta}}{\rho(z)}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{\ell}}\right)\begin{pmatrix}\pi\left(Z_0,E,\vec{\ell},\vec{\theta},t\right)\\ \gamma\left(Z_0,E,\vec{\ell},\vec{\theta},t\right)\end{pmatrix}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}-A' & B'\\ C' & -\sigma_0\end{pmatrix}+\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial E}+\frac{E_s{}^2}{4E^2}\nabla_\theta^2\right)\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\pi\left(Z_0,E,\vec{\ell},\vec{\theta},t\right)\\ \gamma\left(Z_0,E,\vec{\ell},\vec{\theta},t\right)\end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

(2.1)にいくつかの変換を施して解を求める。

2.1. フーリエ変換

(2.1)の両辺に $\exp\left(i\vec{\ell}\vec{x}+i\vec{\zeta}\vec{\theta}\right)$ を乗じて

フーリエ変換を行うと $\nabla_\theta^2=\partial^2/\partial\theta_1^2+\partial^2/\partial\theta_2^2$ の演算が実行できる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\vec{x}}{\rho(z)}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{\zeta}}\right)\begin{pmatrix}f\left(\vec{x},\vec{\zeta}\right)\\ g\left(\vec{x},\vec{\zeta}\right)\end{pmatrix}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}-A' & B'\\ C' & -\sigma_0\end{pmatrix}+\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial E}-\frac{E_s{}^2\zeta^2}{4E^2}\right)\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}f\left(\vec{x},\vec{\zeta}\right)\\ g\left(\vec{x},\vec{\zeta}\right)\end{pmatrix}, \qquad (2.2)$$

$$\begin{pmatrix} f\left(\vec{x},\vec{\zeta}\right) \\ g\left(\vec{x},\vec{\zeta}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi^2}\iiiint \mathrm{e}^{i\vec{\ell}\cdot\vec{x}+i\vec{\zeta}\cdot\vec{\theta}}$$

$$\times \begin{pmatrix} \pi\left(Z_0,E,\vec{\ell},\vec{\theta},t\right) \\ \gamma\left(Z_0,E,\vec{\ell},\vec{\theta},t\right) \end{pmatrix} d\vec{\ell}d\vec{\theta}.$$

(2.2)の解をフーリエ逆変換して求められる(π,γ)を$\vec{\theta}$で積分すればラテラル分布関数(π_2,γ_2)が得られる：

$$\begin{pmatrix} \pi_2\left(Z_0,E,\ell,t\right) \\ \gamma_2\left(Z_0,E,\ell,t\right) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\iint d\vec{\theta}\iiiint \mathrm{e}^{-i\vec{\ell}\cdot\vec{x}-i\vec{\zeta}\cdot\vec{\theta}} \begin{pmatrix} f\left(\vec{x},\vec{\zeta}\right) \\ g\left(\vec{x},\vec{\zeta}\right) \end{pmatrix} d\vec{x}d\vec{\zeta}.$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\vec{\zeta}\cdot\vec{\theta}} d\vec{\theta} = (2\pi)^2\,\delta\left(\vec{\zeta}\right)$$

であるから，

$$\begin{pmatrix} \pi_2\left(Z_0,E,\ell,t\right) \\ \gamma_2\left(Z_0,E,\ell,t\right) \end{pmatrix} = \iint \mathrm{e}^{-i\vec{\ell}\cdot\vec{x}} \begin{pmatrix} f\left(\vec{x},0\right) \\ g\left(\vec{x},0\right) \end{pmatrix} d\vec{x}.$$

$$\mathrm{e}^{-i\vec{\ell}\cdot\vec{x}}\, d\vec{x} = \mathrm{e}^{-i\ell x\cos\varphi}\, x dx d\varphi,$$

および

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-i\ell x\cos\varphi} d\varphi = 2\pi J_0\left(\ell x\right)$$

を用いると，

$$\begin{pmatrix} \pi_2\left(Z_0,E,\ell,t\right) \\ \gamma_2\left(Z_0,E,\ell,t\right) \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{\infty} \begin{pmatrix} f\left(x,0\right) \\ g\left(x,0\right) \end{pmatrix} J_0\left(\ell x\right) 2\pi x dx. \qquad (2.3)$$

ここに $J_0(\ell x)$ は 0 次のベッセル関数。ラテラル分布関数は$f(x,0),g(x,0)$をハンケル変換※ して得られる。しかし(2.2)で$\vec{\zeta}=0$とおいて$f(x,0)$, $g(x,0)$を求めることはできない。$\vec{\zeta}$に関する微分，$\vec{x}\cdot\partial/\partial\vec{\zeta}$，が含まれるからである。これを消去する 1 次変換を考える。

2.2. (2.2)の 1 次変換

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\vec{x}}{\rho(z)}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{\zeta}} \to \frac{\partial}{\partial t'}$$

とする変換を考える。

互いに独立である$\vec{\zeta}$，$\vec{x}$を平行にとる。

$\vec{x}=(x,0),\vec{\zeta}=(\zeta,0)$とすると

$$-\frac{\vec{x}}{\rho(z)}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{\zeta}} = -\frac{x}{\rho(z)}\frac{\partial}{\partial\zeta}.$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ \zeta' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} t \\ \zeta \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

とおく。

$$\begin{pmatrix} \partial/\partial t \\ \partial/\partial\zeta \end{pmatrix} = {}^tA\begin{pmatrix} \partial/\partial t' \\ \partial/\partial\zeta' \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{x}{\rho(z)}\frac{\partial}{\partial\zeta}$$

$$= \left(a_{11} - \frac{x}{\rho(z)}a_{12}\right)\frac{\partial}{\partial t'}$$

$$+ \left(a_{21} - \frac{x}{\rho(z)}a_{22}\right)\frac{\partial}{\partial\zeta'},$$

$$t' = a_{11}t + a_{12}\zeta.$$

※) 2π を除いた(2.3)の積分をハンケル変換と呼ぶ。

ここで

$$\frac{\partial}{\partial t}-\frac{x}{\rho(z)}\frac{\partial}{\partial \zeta}=\frac{\partial}{\partial t'},\quad t=t'$$

を要請すると，

$$a_{11}=1, a_{12}=0, a_{21}=\frac{x}{\rho(z)}a_{22}.$$

任意の $a_{22}(\neq 0)$ は 1 にとる。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x/\rho(z) & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} t \\ \zeta \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} t' \\ \zeta' \end{pmatrix}.\quad \zeta=\zeta'-\frac{x}{\rho(z)}t'.$$

x と ζ は同じ向きをもつから ζ' も同じ向き。よって $\zeta'=\xi x/\rho(z)$ と表すことができる。$\zeta=(\xi-t')x/\rho(z)$ （$\zeta=0$ はあとで $(\xi-t')\to 0$ として実現する)。

t' を単に t と記し，f,g を $f(E,x,t)$，$g(E,x,t)$ と表す。

微分方程式(2.2)は 1 次変換によって(2.4)になる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} f(E,x,t) \\ g(E,x,t) \end{pmatrix}$$

$$=\{\begin{pmatrix} -A' & B' \\ C' & -\sigma_0 \end{pmatrix}+\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial E}-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\frac{(\xi-t)^2}{\rho(z)^2}\right)$$

$$\times\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\}\begin{pmatrix} f(E,x,t) \\ g(E,x,t) \end{pmatrix}. \qquad (2.4)$$

2.3. メリン変換

(2.4)をメリン変換すれば $-A', B', C'$ の演算が実行される。[1)]

関数 $f(E)$ のメリン変換は s を複素数として次式で定義される：

$$\int_0^\infty E^s f(E)\,dE=\mathfrak{M}_f(s).$$

微分の変換は，

$$\int_0^\infty E^s\frac{df(E)}{dE}dE=-s\mathfrak{M}_f(s-1).$$

メリン逆変換は，

$$f(E)=\frac{1}{2\pi i}\int_c E^{-s-1}\mathfrak{M}_f(s)\,ds.$$

さて，(2.4)にメリン変換を施す。

$$\int_0^\infty E^s\begin{pmatrix} f(E,x,t) \\ g(E,x,t) \end{pmatrix}dE=\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s,x,t) \\ \mathfrak{M}_g(s,x,t) \end{pmatrix}$$

と記すと，

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s,x,t) \\ \mathfrak{M}_g(s,x,t) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -A(s) & B(s) \\ C(s) & -\sigma_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s,x,t) \\ \mathfrak{M}_g(s,x,t) \end{pmatrix}$$

$$-s\varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s-1,x,t) \\ \mathfrak{M}_g(s-1,x,t) \end{pmatrix}$$

$$-\frac{E_s{}^2x^2}{4}\frac{(\xi-t)^2}{\rho(z)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s-2,x,t) \\ \mathfrak{M}_g(s-2,x,t) \end{pmatrix}. \qquad (2.5)$$

微分方程式(2.4)はメリン変換によって差分微分方程式(2.5)に変換される。

(2.5)に $\mathfrak{M}_g(s-1,x,t), \mathfrak{M}_g(s-2,x,t)$ という項は含まれないが式を見やすくするために挿入する。数式の意味は損なわれない。

3. 差分演算子の導入と鈴木-Trotter 公式

3.1. 差分演算子 $\varDelta$

差分演算子 $\varDelta$ を導入する：

$$\varDelta f(s)=f(s)-f(s-1). \tag{3.1}$$

$$(1-\varDelta)f(s)=f(s-1), \tag{3.1$'$}$$

$$(1-\varDelta)^n f(s)=f(s-n) \tag{3.1$''$}$$

となるから，$(1-\varDelta)^n$ をずらし演算子とここでは呼ぶ。これを用いると (2.5)は,

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_f(s,x,t)\\ \mathfrak{M}_g(s,x,t)\end{pmatrix}$$
$$=\{\begin{pmatrix}-A(s) & B(s)\\ C(s) & -\sigma_0\end{pmatrix}$$
$$+\left(-s\varepsilon(1-\varDelta)-\frac{E_s{}^2x^2}{4}\frac{(\xi-t)^2}{\rho(z)^2}(1-\varDelta)^2\right)$$
$$\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\}\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_f(s,x,t)\\ \mathfrak{M}_g(s,x,t)\end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

ここで略記を導入する。

$$\begin{pmatrix}-A(s) & B(s)\\ C(s) & -\sigma_0\end{pmatrix}=P(s),$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=Q_0,-s\varepsilon Q_0=Q(s),$$

$$-\frac{E_s{}^2x^2}{4}\frac{(\xi-t)^2}{\rho(z)^2}Q_0=R(x,t).$$

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_f(s,x,t)\\ \mathfrak{M}_g(s,x,t)\end{pmatrix}=\mathfrak{M}(s,x,t).$$

このとき(3.2)は,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{M}(s,x,t)$$
$$=\{P(s)+Q(s)(1-\varDelta)$$
$$+R(x,t)(1-\varDelta)^2\}\mathfrak{M}(s,x,t). \tag{3.3}$$

$$PQ\neq QP, PR\neq RP.$$

3.2. 鈴木-Trotter 公式

非可換行列をもつ微分方程式(3.3)の解は鈴木-Trotter 公式 [2),3)]を用いて表される：

$$\mathfrak{M}(s,x,t)=\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}_n(s,x,t),$$
$$\mathfrak{M}_n(s,x,t)$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{R(x,t_k)(1-\varDelta)^2\varDelta t}\,\mathrm{e}^{Q(s)(1-\varDelta)\varDelta t}\,\mathrm{e}^{P(s)\varDelta t}\right)\cdot\mathfrak{M}_0(s),$$
$$t_k=k\varDelta t,\ \varDelta t=t/n. \tag{3.4}$$

初期条件を電子光子の同時入射とする。

$$\mathfrak{M}_0(s)$$
$$=\int_0^\infty E^s\begin{pmatrix}\delta(E-E_0)\\ \delta(E-W_0)\end{pmatrix}dE=\begin{pmatrix}E_0{}^s\\ W_0{}^s\end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

(f,g) は次式で表される。

$$\begin{pmatrix}f(Z_0,E,x,t)\\ g(Z_0,E,x,t)\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c\frac{ds}{E^{s+1}}$$
$$\times\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{R(x,t_k)(1-\varDelta)^2\varDelta t}\,\mathrm{e}^{Q(s)(1-\varDelta)\varDelta t}\,\mathrm{e}^{P(s)\varDelta t}\right)$$
$$\times\mathfrak{M}_0(s). \tag{3.6}$$

行列 $R(x,t_k)$ と $Q(s)$ は可換であるから

それぞれの指数行列は一つに纏められる（すなわち散乱項と電離損失項とは重ね合わされる)。

$$\mathrm{e}^{R(x,t_k)(1-\Delta)^2\Delta t}\,\mathrm{e}^{Q(s)(1-\Delta)\Delta t}$$
$$=\mathrm{e}^{\{R(x,t_k)(1-\Delta)^2+Q(s)(1-\Delta)\}\Delta t}.$$

この指数行列を展開し $n\to\infty$ とすれば

$$\begin{pmatrix} f(Z_0,E,x,t) \\ g(Z_0,E,x,t) \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c \frac{ds}{E^{s+1}}\{\mathrm{e}^{P(s)t}\mathfrak{M}_0(s)$$
$$+\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4}\right)\int_0^t dt'\,\mathrm{e}^{P(s)(t-t')}\frac{(\xi-t')^2}{\rho(z(t))^2}$$
$$\times Q_0\,\mathrm{e}^{P(s-2)t'}\mathfrak{M}_0(s-2)$$
$$+(-\varepsilon s)\int_0^t dt'\,\mathrm{e}^{P(s)(t-t')}Q_0\,\mathrm{e}^{P(s-1)t'}\mathfrak{M}_0(s-1)$$
$$+\cdots\}.$$

ここで, s の原点を項別にずらすことができる。[4]

$$\begin{pmatrix} f(Z_0,E,x,t) \\ g(Z_0,E,x,t) \end{pmatrix}=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c \frac{ds}{E^{s+1}}\{\mathrm{e}^{P(s)t}$$
$$+\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\right)\int_0^t dt'\,\mathrm{e}^{P(s+2)(t-t')}\frac{(\xi-t')^2}{\rho(z(t'))^2}$$
$$\times Q_0\,\mathrm{e}^{P(s)t'}$$
$$+\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)(s+1)\int_0^t dt'\,\mathrm{e}^{P(s+1)(t-t')}$$
$$\times Q_0\,\mathrm{e}^{P(s)t'}+\cdots\}\mathfrak{M}_0(s).$$

このことから次の定理が成立する。

『メリン逆変換と s の原点移動を組みにすると，右側へ演算する演算子を左側へ演算する演算子に置き換えることができる』

3.3. 演算子 $\bar{\Delta}$

定理の内容は次式を意味する：

$$(1-\Delta)^k f(s)\to f(s)(1-\bar{\Delta})^k,(k=1,2).$$

$\bar{\Delta}$ は左側へ演算する差分演算子：

$$f(s)\bar{\Delta}=f(s)-f(s+1), \tag{3.7}$$

$$f(s)(1-\bar{\Delta})^k=f(s+k). \tag{3.7$'$}$$

$\chi(s)$ をスカラーとすると

$$\chi(s)f(s)(1-\bar{\Delta})^k$$
$$=f(s)(1-\bar{\Delta})^k\chi(s+k). \tag{3.7$''$}$$

ずらし演算子を用いると,

$$\begin{pmatrix} f(Z_0,E,x,t) \\ g(Z_0,E,x,t) \end{pmatrix}=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c \frac{ds}{E^{s+1}}\{\mathrm{e}^{P(s)t}$$
$$+\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4}\right)\int_0^t dt'\,\mathrm{e}^{P(s)(t-t')}\frac{(\xi-t')^2}{\rho(z(t'))^2}(1-\bar{\Delta})^2$$
$$\times Q_0\mathrm{e}^{P(s)t'}$$
$$+(-s\varepsilon)\int_0^t dt'\,\mathrm{e}^{P(s)(t-t')}(1-\bar{\Delta})$$
$$\times Q_0\mathrm{e}^{P(s)t'}+\cdots\}\mathfrak{M}_0(s).$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c \frac{ds}{E}\{\mathrm{e}^{P(s)t}$$
$$+\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\right)\int_0^t dt'\,\mathrm{e}^{P(s)(t-t')}\frac{(\xi-t')^2}{\rho(z(t'))^2}$$
$$\times(1-\bar{\Delta})^2\,Q_0\,\mathrm{e}^{P(s)t'}$$
$$+\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)s\int_0^t dt'\,\mathrm{e}^{P(s)(t-t')}$$
$$\times(1-\bar{\Delta})Q_0\,\mathrm{e}^{P(s)t'}+\cdots\}\begin{pmatrix} (E_0/E)^s \\ (W_0/E)^s \end{pmatrix}.$$

この規則を一般化すれば次に示す解(4.1)が得られる。

4.　解(f, g)

$$\begin{pmatrix} f\left(Z_0,E,x,t\right) \\ g\left(Z_0,E,x,t\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_c \frac{ds}{E}$$
$$\times \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\{\mathrm{e}^{\left(-\frac{{E_s}^2x^2}{4E^2}\left(1-\bar{\varDelta}\right)^2\frac{\left(\zeta-t_k\right)^2}{\rho\left(z\left(t_k\right)\right)^2}-\frac{\varepsilon s}{E}\left(1-\bar{\varDelta}\right)\right)Q_0\varDelta t}$$
$$\times \mathrm{e}^{P(s)\varDelta t}\}\begin{pmatrix} \left(E_0/E\right)^s \\ \left(W_0/E\right)^s \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

散乱項と電離損失項が重ね合わされた(4.1)は直感的に分かりやすい構造をもつ。この構造は解を正しく表現するが数式計算には不向きである。なぜなら，指数部分を展開し極限をとれば多重積分が現れる。積分は電子の経路に対応する。経路の数は多重度とともに 2 の累乗で増大し，経路は錯綜していく。その一つひとつを辿る計算は極めて煩雑だからである。そこで次の樹形モデルを考える。

5.　樹形モデル

(4.1)の計算が煩雑になるのは 2 つの過程が重ね合わされて（すなわち並列して）いるからである。計算を簡単にするために樹形モデルを導入する。これは，入射粒子が引き起こすカスケード過程を幹（3 次元 A 近似散乱過程）とし幹から派生するカスケード過程を枝（1 次元 B 近似電離損失過程）とするモデルである。つまり（散乱過程と電離損失過程が並列した形でなく）散乱過程のあとに電離損失過程が直列するという形である。電離損失のあとに散乱は考えない。よって次式のように表現できる。

$$\begin{pmatrix} f\left(Z_0,E,x,t\right) \\ g\left(Z_0,E,x,t\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_c \frac{ds}{E}$$
$$\times \lim_{m,n\to\infty}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{E}\left(1-\bar{\varDelta}\right)\left(s+1\right)Q_0\varDelta t}\,\mathrm{e}^{P(s)\varDelta t}\right)^n$$
$$\times \prod_{k=1}^{m}\left(\mathrm{e}^{-\frac{{E_s}^2x^2}{4E^2}\left(1-\bar{\varDelta}\right)^2\frac{\left(\xi-t_k\right)^2}{\rho\left(z\left(t_k\right)\right)^2}Q_0\varDelta t}\,\mathrm{e}^{P(s)\varDelta t}\right)$$
$$\times \begin{pmatrix} \left(E_0/E\right)^s \\ \left(W_0/E\right)^s \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

$\varDelta t = t/m,\, t/n.$

ここで(4.1)指数部の $-\dfrac{\varepsilon}{E}s\left(1-\bar{\varDelta}\right)$ を $-\dfrac{\varepsilon}{E}\left(1-\bar{\varDelta}\right)\left(s+1\right)$ に書き換えた。

6.　漸化式

6.1. 散乱過程の漸化式

散乱過程を m 回経た世代を $\varPhi_{m0}$ と記す。

$$\varPhi_{m0}\left(s,\frac{\xi-t}{\rho\left(z\left(t\right)\right)},t\right) = \int_0^t \phi_{00}\left(s+2m,t-t'\right)$$
$$\times Q_0\frac{\left(\xi-t'\right)^2}{\rho\left(z\left(t'\right)\right)^2}\varPhi_{m-1\,0}\left(s,\frac{\xi-t'}{\rho\left(z\left(t'\right)\right)},t'\right)dt',$$
$$\varPhi_{00}\left(s,\frac{\xi-t}{\rho\left(z\left(t\right)\right)},t\right) = \phi_{00}\left(s,t\right) = \mathrm{e}^{P(s)t}.$$

$\mathrm{e}^{P(s)t}$ の表式を補遺に示す。

$$\lim_{(\xi-t)\to 0}\varPhi_{m0}\left(s,\frac{\xi-t}{\rho\left(z\left(t\right)\right)},t\right) = \phi_{m0}\left(s,t\right). \tag{6.1}$$

入射電子の創る電子成分$\left(\mathrm{e}\to\mathrm{e}\right)$における

$\phi_{m\,0}\left(s,t\right)$ の計算を第Ⅳ稿補遺 A1 に示す。

6.2. 電離損失過程の漸化式

散乱過程を m 回経たあと電離損失過程を n 回経た世代を ϕ_{mn} と記す。

$$\phi_{mn}(s,t)=\int_0^t \phi_{00}(s+2m+n,t-t')$$
$$\times Q_0\phi_{m\,n-1}(s,t')\,dt'. \qquad (6.2)$$

初期条件は $\phi_{m0}(s,t)$.

$\mathrm{e}\to\mathrm{e}$ における $\phi_{mn}(s,t)$ の計算を第Ⅳ稿補遺 A2 に示す。

6.3. 解の表式

大気密度を考慮した拡散方程式の解は次式で表される。

$$\begin{pmatrix} f(Z_0,E,x,t) \\ g(Z_0,E,x,t) \end{pmatrix}=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c \frac{ds}{E^{s+1}}$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{E_s{}^2}{4E^2}\frac{x^2}{\rho(z(t))^2}\right)^m$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n\frac{(s+2m+n)!}{(s+2m)!}$$
$$\times\phi_{mn}(s,t)\begin{pmatrix} E_0{}^s \\ W_0{}^s \end{pmatrix}. \qquad (6.3)$$

補 遺　exp($P(s)t$)の表式

$P(s)=\begin{pmatrix} -A(s) & B(s) \\ C(s) & -\sigma_0 \end{pmatrix}$ の固有値は

$$\lambda_{\frac{1}{2}}(s)=\frac{1}{2}\{-A(s)-\sigma_0$$
$$\pm\sqrt{(A(s)-\sigma_0)^2+4B(s)C(s)}\}.$$

恒等式

$$\lambda_1(s)+\lambda_2(s)+A(s)+\sigma_0=0,$$
$$(\lambda_1(s)+A(s))(\lambda_1(s)+\sigma_0)$$
$$=(\lambda_2(s)+A(s))(\lambda_2(s)+\sigma_0)$$
$$=B(s)C(s).$$

$P(s)$ の対角化行列 S,S^{-1},

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\lambda_1(s)+A(s)}{B(s)} & \dfrac{C(s)}{\lambda_2(s)+\sigma_0} \end{pmatrix},$$

$$S^{-1}=\frac{1}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)}$$
$$\times\begin{pmatrix} \lambda_1(s)+\sigma_0 & B(s) \\ \lambda_1(s)+A(s) & -B(s) \end{pmatrix},$$

$$S^{-1}P(s)S=\begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{e}^{P(s)t}=S\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1(s)t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2(s)t} \end{pmatrix}S^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$a=H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}+H_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t},$$
$$b=\frac{B(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}-\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}\right),$$
$$c=\frac{C(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}-\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}\right),$$
$$d=H_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}+H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}.$$
$$H_1(s)=\frac{\lambda_1(s)+\sigma_0}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)},$$
$$H_2(s)=\frac{\lambda_1(s)+A(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)}=1-H_1(s).$$

※　足利大学名誉教授

原稿受付日　令和 6 年 1 月 1 日