3 次元電磁カスケード B 近似理論

大気密度を考慮したラテラル分布関数の計算

Ⅱ．非均質媒質の 3 次元拡散方程式

新 居 誠 彦※

A Calculation of Lateral Distribution Function under Approximation B
in Three Dimensional Electron - Photon Cascade Theory,
by Taking the Atmospheric Density into Consideration.
Ⅱ．Three-Dimensional Diffusion Equation for Inhomogeneous Material.

NII Nobuhiko

Abstract
We rewrite the three-dimensional diffusion equation for homogeneous material to for inhomogeneous material, and calculate a lateral distribution function basing on the rewritten equation.

Keywords : three-dimensional cascade theory, electron number lateral distribution function, Approximation B, atmospheric density, diffusion equation for inhomogeneous material.

1. はじめに

電磁成分の振る舞いを記述する 3 次元拡散方程式は均質媒質に対するものである。他方で非均質媒質（大気）中のシャワー現象に空気シャワーがある。空気シャワーを構成する個々のシャワーは高度とともに密度が変化する大気の中を通過する。単一電子の創るシャワーのラテラル分布は大気中でどのように表されるか。非均質媒質に対する拡散方程式を考察する。先ず均質媒質の拡散方程式を顧みる。

2. 均質媒質の拡散方程式

電磁カスケード理論 3 次元拡散方程式は均質媒質に対するものである。[1),2)]

この方程式を行列で表示すれば,

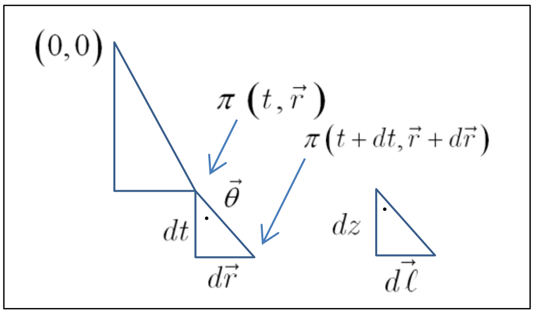
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)\begin{pmatrix}\pi\\ \gamma\end{pmatrix} =\left\{\begin{pmatrix}-A' & B'\\ C' & -\sigma_0\end{pmatrix}+\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial E}+\frac{E_s{}^2}{4E^2}\nabla_\theta^2\right)\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\pi\\ \gamma\end{pmatrix}. \tag{1}$$

方程式から得られるラテラル分布関数の横方向の距離は，縦方向の深さと同じく輻射長 g/cm² で記述される。
他方，空気シャワーは大気という非均質媒質中のシャワー現象である。観測される横拡がりの距離は幾何学的距離 m である。次に，大気密度を考慮に入れた，か

つ，横方向を m の単位で記述する非均質媒質に対する拡散方程式を考察する。

2.　非均質媒質の拡散方程式

3 次元カスケードシャワーを記述する座標を $(t,\vec{r})$ とする。単位はともに輻射長(g/cm²)である。シャワーの発生点を $(0,0)$ とし，点 $(t,\vec{r})$ の先に頂角 $\vec{\theta}$ の小さい領域 $(dt,d\vec{r})$ をとる。



小領域における電子数変化 $d\pi$ は,

$$d\pi=\pi(t+dt,\vec{r}+d\vec{r})-\pi(t,\vec{r})$$

$$=\frac{\partial\pi(t,\vec{r})}{\partial t}dt+\frac{\partial\pi(t,\vec{r})}{\partial\vec{r}}d\vec{r}$$

$$+\frac{\partial^2\pi(t,\vec{r})}{\partial t\partial\vec{r}}dtd\vec{r}.$$

ここで $d\vec{r}=\vec{\theta}dt$ を用いる。このとき

$d\pi/dt$ の第 3 項は大きさが $o(dt)$ となって省略できる。よって,

$$\frac{d\pi}{dt}=\frac{\partial\pi(t,\vec{r})}{\partial t}+\vec{\theta}\cdot\frac{\partial\pi(t,\vec{r})}{\partial\vec{r}}.$$

次に高度 z の原点を地上にとり小領域の角（かど）の座標を $(z,\vec{\ell})$，それぞれの辺長を $dz,d\vec{\ell}$ とする（単位 m)。

$d\vec{r}$ と $d\vec{\ell}$ は密度 $\rho(z)$ を介して

$$d\vec{r}=\rho(z)d\vec{\ell}. \qquad (2)$$

よって

$$\frac{d\pi}{dt}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\vec{\theta}}{\rho(z)}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{\ell}}\right)\pi(t,\vec{\ell}).$$

ゆえに拡散方程式は,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\vec{\theta}}{\rho(z)}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{\ell}}\right)\begin{pmatrix}\pi(Z_0,E,\vec{\ell},\vec{\theta},t)\\ \gamma(Z_0,E,\vec{\ell},\vec{\theta},t)\end{pmatrix}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}-A' & B'\\ C' & -\sigma_0\end{pmatrix}+\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial E}+\frac{E_s{}^2}{4E^2}\nabla_\theta^2\right)\right.$$

$$\left.\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\pi(Z_0,E,\vec{\ell},\vec{\theta},t)\\ \gamma(Z_0,E,\vec{\ell},\vec{\theta},t)\end{pmatrix}. \qquad (3)$$

1 次エネルギー　$Z_0=\begin{cases}E_0 & \text{(電子入射)},\\ W_0 & \text{(光子入射)}.\end{cases}$

大気密度を考慮した拡散方程式(3)は，シャワーの縦方向への発達を変数 t [kg/m²]で，横方向への拡がりを変数 $\vec{\ell}$ [m]で記述する。方程式の解を第Ⅲ稿で求める。

参考文献

1)　L.D.Landau and G.Rumer, *Collected Papers of D LANDAU*, ed.R.ter Haar(Pergamon Press,Headindton Hill Oxford,London.1956),252.

2)　J.Nishimura,Handbuch der Physik,XLVI/2(1967),1

※　足利大学名誉教授

原稿受付日　令和 6 年 1 月 1 日