

3 次元電磁カスケード B 近似理論

エネルギー流ラテラル分布関数の計算

IV. 電子エネルギー流ラテラル分布関数の計算

新居 誠彦*

A Calculation of Energy-flow Lateral Distribution Function under Approximation B

in Three Dimensional Electron-Photon Cascade Theory.

IV. Representation of Electron Energy-flow Lateral

Distribution Function under Approximation B.

NII Nobuhiko

Abstract

We evaluate the electron energy-flow lateral distribution function under Approximation B, and display graphs for some incident energies.

Keywords : three-dimensional cascade theory, energy-flow lateral distribution function, Approximation B,

1. はじめに

3 次元電磁カスケード B 近似理論における電子数ラテラル分布関数およびエネルギー流ラテラル分布関数の表式を第 I 稿で導いた。

本稿 (第IV稿) でエネルギー流ラテラル分布関数の数値を計算する。第V稿で電子数ラテラル分布関数を数値計算する。エネルギー流分布関数とそれとを組み合わせる。単位電子の平均エネルギーラテラル分布関数を求める。3 種の結果を図と表に示す。

2. 電子エネルギー流ラテラル分布関数

第 I 稿に示した電子成分のエネルギー流ラテラル分布関数 $\Pi_E(E_0, E, r, t)$ は A 近似式と B 近似式を含む。¹⁾ ここではエネルギー閾値がゼロの B 近似式を取りあげる。上の表式において $E \rightarrow 0$ とし $\varepsilon \ll E_0$ を考慮すると B 近似式は、

$$\begin{aligned} & \Pi_E(E_0, 0, r, t) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_c \left(\frac{E_0 r}{E_s} \right)^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \times \end{aligned}$$

$$\times \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}} D_j(s) A_{ij}(s, r), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & A_{ij}(s, r) \\ &= \frac{E_s}{r^3} \alpha_i(s)^{1/2} \left\{ \Gamma \left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{\beta_j(s)^2 \varepsilon^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \Gamma \left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{E_0^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right) \right\} \\ & \quad - \frac{\varepsilon \beta_j(s)}{r^2} \left\{ \Gamma \left(-\frac{s}{2} + 1, \frac{\beta_j(s)^2 \varepsilon^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \Gamma \left(-\frac{s}{2} + 1, \frac{E_0^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \right) \right\}. \quad (2.2) \end{aligned}$$

分布関数(2.1)の体積がエネルギー流遷移曲線を正しく与えることは補遺 I に示す。ここでは分布関数の形状を検討する。

2.1. ラテラル分布関数の形状

分布関数の形状を吟味する。先ず、ラテラル分布関数を次のように書き直す。

$$\begin{aligned} & \Pi_E(E_0, 0, r, t) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon} \right)^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \cdot \frac{\varepsilon^3}{E_s^2} \\ & \quad \times \left[\left(\frac{\varepsilon r}{E_s} \right)^{s-3} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2-1/2}} D_j(s) \right. \\ & \quad \times \left\{ \Gamma \left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{\beta_j(s)^2}{\alpha_i(s)} \left(\frac{\varepsilon r}{E_s} \right)^2 \right) \right. \\ & \quad \left. \left. - \Gamma \left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{1}{\alpha_i(s)} \left(\frac{E_0 r}{E_s} \right)^2 \right) \right\} \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{\varepsilon r}{E_s} \right)^{s-2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}} D_j(s) \beta_j(s) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \Gamma \left(-\frac{s}{2} + 1, \frac{\beta_j(s)^2}{\alpha_i(s)} \left(\frac{\varepsilon r}{E_s} \right)^2 \right) \right. \\ & \quad \left. - \Gamma \left(-\frac{s}{2} + 1, \frac{1}{\alpha_i(s)} \left(\frac{E_0 r}{E_s} \right)^2 \right) \right\}. \quad (2.3) \end{aligned}$$

次に、(2.3)の 2ヶ所にある、不完全ガンマ関数の差をそれぞれ

$$\Delta(-s/2+3/2, r), \quad \Delta(-s/2+1, r)$$

と記す。ラテラル分布関数の r -依存は、

$$\begin{aligned} \Pi_E(r) &\sim r^{s-3} \Delta(-s/2+3/2, r) \\ &\quad - r^{s-2} \Delta(-s/2+1, r). \quad (2.4) \end{aligned}$$

(i) コア近傍での形状

$$\Gamma(\alpha, x) \rightarrow \Gamma(\alpha) - x^\alpha / \alpha, (x \rightarrow 0)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \Pi_E(r \rightarrow 0) &\sim \frac{E_0^{-s+3} - (\varepsilon \beta_j(s))^{-s+3}}{-s/2+3/2} \\ &\quad - \frac{E_0^{-s+2} - (\varepsilon \beta_j(s))^{-s+2}}{-s/2+1}. \quad (2.5) \end{aligned}$$

一定値をもつ。 $s \rightarrow 3, s \rightarrow 2$ で第 1,2 項 $\rightarrow 2 \ln(E_0/\varepsilon \beta_j)$ 、即ち非発散(一定)である。

(ii) 遠方での形状

$$\Gamma(\alpha, x) \rightarrow x^{\alpha-1} e^{-x}, (x \rightarrow \infty) \text{ であるから、}$$

$$\Pi_E(r \rightarrow \infty) \sim r^{-2} e^{-\varepsilon^2 \beta_j(s)^2 r^2 / \alpha_i(s) E_s^2} \quad (2.6)$$

ガウス型より速く $r^{-2} e^{-r^2}$ の形で減少。

(iii) 中間領域における形状

$r \rightarrow 0$ および $r \rightarrow \infty$ で

$$\Delta(-s/2+3/2, r) \rightarrow 0, \Delta(-s/2+1, r) \rightarrow 0.$$

ともに上に凸の関数だから最大値を与える点が存在する。この点を含むある範囲では変化が緩いため関数値はほぼ一定と見做することができる。よって $\Pi_E(r)$ はほぼベキで表される。

以上から分布関数の形状はコアから外へ向かって、一定 \rightarrow 略ベキ $\rightarrow r^{-2} e^{-r^2}$ と変化していく。

3. 重ね合わせの係数

分布関数(2.3)は $(\epsilon r/E_s)^{s-3}$ の項がおもみ $C_i(s)D_j(s)/\alpha_i(s)^{s/2-1/2}$ で、 $(\epsilon r/E_s)^{s-2}$ の項がおもみ $C_i(s)D_j(s)\beta_j(s)/\alpha_i(s)^{s/2}$ で重ね合わされる。これらの数値を検討する。

3.1. 構成要素の数値

重ね合わせの係数を構成する 4 種の要素 ; $C_i(s), \alpha_i(s)$ および $D_j(s), \beta_j(s)$ は、

$$\sum_{i=1}^M C_i(s) \alpha_i(s)^m = m! C_0^{(m)}(s) / \rho_{2m}(s) \quad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^N D_j(s) \beta_j(s)^n = n! \rho_n(s) \quad (3.2)$$

を満たすようにそれぞれ決定した。¹⁾

散乱過程を記述する量 $C_0^{(m)}(s)$ と電離損失過程を記述する量 $\rho_n(s)$ を第 III 稿で計

算した ($m \leq 7, n \leq 14, s = 0.25 \sim 3.5$)。

ここに(3.1),(3.2)に関する数値を示す。

まず(3.1)右辺の値を表 1 と図 1 に与える。

m \ S \rightarrow	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.523916	0.776011	1.553736	3.863597	11.62207	35.35769	98.27398	244.1085
2	3.824869	7.863071	38.8901	328.3746	3197.037	27381.74	188428.5	1039071
3	106.5215	344.954	6422.971	186626	5316534	1.19E+08	1.91E+09	2.22E+10
4	7687.281	50742.95	4078763	3.67E+08	2.93E+10	1.66E+12	6.08E+13	1.46E+15
5	1233086	21404186	6.64E+09	1.78E+12	3.94E+14	5.62E+16	4.62E+18	2.26E+20
6	4.17E+08	2.06E+10	2.22E+13	2.04E+16	1.08E+19	3.84E+21	7.07E+23	7E+25
7	2.84E+11	3.72E+13	1.33E+17	3.14E+20	5.29E+23	4.7E+26	1.93E+29	3.86E+31

表 1. $m!C_0^{(m)}(s)/\rho_{2m}(s)$ の値

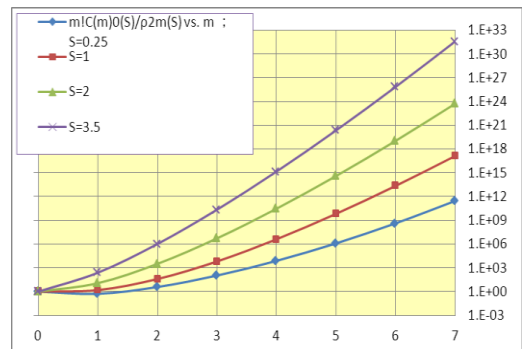


図 1. $m!C_0^{(m)}(s)/\rho_{2m}(s)$ の例

(3.1)左辺の $\alpha_i(s), C_i(s)$ を表 2 に示す。

ただし $M = 4$ とした。

S \rightarrow	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
α_1	0.343383	0.550588	1.227315	2.442919	8.901426	26.47403	72.28332	176.7534
α_2	18.82944	31.68772	107.8446	183.6349	1073.321	2804.572	6558.989	13870.7
α_3	147.7537	355.0582	1324.454	2127.306	11204.5	28297.89	64015.27	131038.2
α_4	936.4834	2283.069	7719.322	16331.34	63850.43	159766.3	357569.8	723495.4
C_1	0.990324	0.992787	0.996951	0.992309	0.997459	0.996822	0.996019	0.995116
C_2	0.009663	0.007211	0.003048	0.007677	0.00254	0.003176	0.003978	0.00488
C_3	1.29E-05	2.55E-06	1.1E-06	1.4E-05	1.53E-06	2.12E-06	2.95E-06	4.01E-06
C_4	4.18E-10	1.1E-10	7.66E-11	1.01E-09	1.14E-10	1.65E-10	2.41E-10	3.46E-10

表 2. $\alpha_i(s), C_i(s)$ の値

次に(3.2)右辺の値を表 3 と図 2 に示す。

n \ S \rightarrow	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.352043	0.535542	0.817563	1.011395	1.138675	1.226093	1.293491	1.351426
2	0.203982	0.436588	0.930199	1.355245	1.665104	1.887224	2.062463	2.21706
3	0.159546	0.463418	1.322128	2.217027	2.929003	3.455372	3.874612	4.248641
4	0.154729	0.59645	2.222657	4.232646	5.963176	7.276649	8.326263	9.265264
5	0.177491	0.893835	4.276825	9.167248	13.70067	17.22743	20.04752	22.56485
6	0.233714	1.519295	9.215711	22.09146	34.89769	45.10466	53.26468	60.51156
7	0.346003	2.875857	21.8936	58.40331	97.25907	128.9905	154.3549	176.7302

表 3. $n!\rho_n(s)$ の値

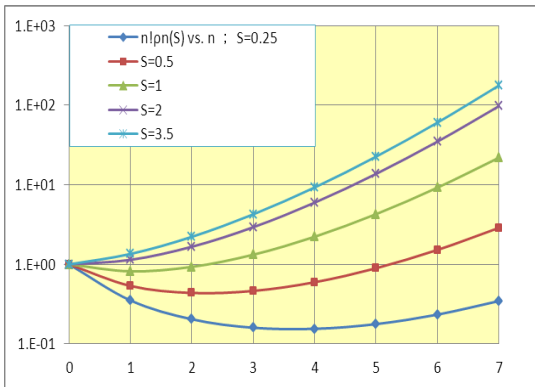


図 2. $n! \rho_n(s)$ の例

(3.2)左辺の $\beta_j(s), D_j(s)$ を表 4 に示す。

ただし $N = 4$ とした。

S →	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
β_1	0.105651	0.164566	0.269008	0.355874	0.424867	0.480997	0.529674	0.574114
β_2	0.460335	0.638581	0.888563	1.054705	1.163438	1.237948	1.295135	1.343998
β_3	1.050944	1.387182	1.811818	2.067391	2.21875	2.310172	2.371723	2.419447
β_4	1.951318	2.49126	3.130894	3.496313	3.702594	3.818165	3.887769	3.935581
D1	0.456195	0.399261	0.334196	0.301015	0.282512	0.270352	0.260931	0.252766
D2	0.456357	0.49	0.524691	0.54132	0.551059	0.557959	0.563384	0.567873
D3	0.085377	0.107734	0.136738	0.152498	0.160865	0.165922	0.169783	0.173336
D4	0.002071	0.003005	0.004374	0.005167	0.005565	0.005768	0.005902	0.006025

表 4. $\beta_j(s), D_j(s)$ の値

3.2. 重ね合わせのおもみ

(2.3)における 2 項の重ね合わせのおもみ

を $w_{ij}(s), w'_{ij}(s)$ と記す。

$$w_{ij}(s) = \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2-1/2}} D_j(s), \quad (3.3)$$

$$w'_{ij}(s) = \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}} D_j(s) \beta_j(s). \quad (3.4)$$

おもみの組み合わせは16通りあるが、表

2 より $C_2, C_3, C_4 \ll C_1$ であるから $i \geq 2$

の項は考慮しなくてよい。

(3.3), (3.4)で $i=1$ とし s を径数とした値を表 6, 表 7 に示す。

$C_1(s) \alpha_1(s)^{-S/2+1/2} \times D_j(S)$				
S ↓ / j →	1	2	3	4
0.25	0.302583	0.3026905	0.0566287	0.001374
0.5	0.341444	0.4190431	0.0921327	0.00257
1	0.333177	0.5230916	0.1363208	0.004361
1.5	0.238923	0.4296589	0.1210414	0.004101
2	0.09445	0.184231	0.0537806	0.00186
2.5	0.02309	0.0476546	0.0141712	0.000493
3	0.003595	0.0077631	0.0023395	8.13E-05
3.5	0.003483	0.0078249	0.0023885	8.3E-05

表 6. $w_{1j}(s)$ の値

$w_{1j}(s)$ の一例を図 3 に示す。

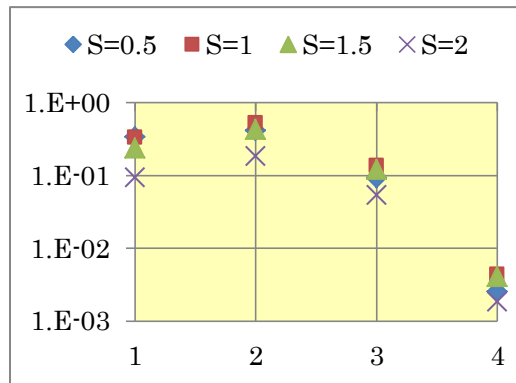


図 3. $w_{1j}(s)$ vs. $j; s = 0.5, 1, 1.5, 2$

$C_1(s) \alpha_1(s)^{-S/2} \times D_j(S) \beta_j(S)$				
S ↓ / j →	1	2	3	4
0.25	0.054554	0.2377843	0.101561	0.004575
0.5	0.075726	0.3606295	0.1722399	0.008629
1	0.080903	0.4195541	0.2229456	0.012325
1.5	0.0544	0.2899347	0.160104	0.009174
2	0.01345	0.0718416	0.0399949	0.002309
2.5	0.002159	0.0114656	0.0063627	0.000366
3	0.000224	0.0011826	0.0006526	3.72E-05
3.5	0.000235	0.001237	0.0006797	3.84E-05

表 7. $w'_{1j}(s)$ の値

$w'_{1j}(s)$ の一例を図 4 に示す。

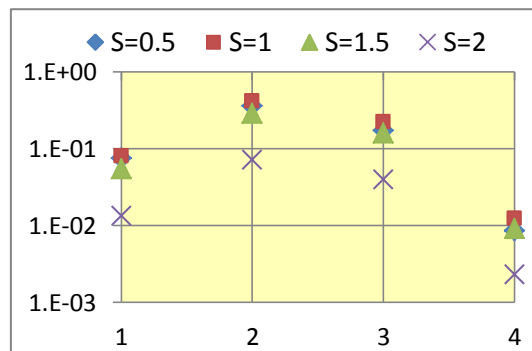


図 4. $w'_{1j}(s)$ vs. $j; s = 0.5, 1, 1.5, 2$

おもみ(3.3)と(3.4)は同じオーダーの大きさであることを図 3, 図 4 は示す。

4. エネルギー流ラテラル分布関数の数値計算

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, 0, r, t) &= \frac{1}{4\pi^2 i} \int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ &\times \frac{\varepsilon^3}{E_s^2} \mathfrak{M}_E(s, E_0, r), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_E(s, E_0, r) &= \left(\frac{\varepsilon r}{E_s}\right)^{s-3} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{C_i(s) D_j(s)}{\alpha_i(s)^{s/2-1/2}} \\ &\times \left\{ \Gamma\left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{\beta_j(s)^2 \varepsilon^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \Gamma\left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{E_0^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2}\right) \right\} \\ &- \left(\frac{\varepsilon r}{E_s}\right)^{s-2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{C_i(s) D_j(s) \beta_j(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}} \\ &\times \left\{ \Gamma\left(-\frac{s}{2} + 1, \frac{\beta_j(s)^2 \varepsilon^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2}\right) \right. \\ &\quad \left. - \Gamma\left(-\frac{s}{2} + 1, \frac{E_0^2 r^2}{\alpha_i(s) E_s^2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.1. 鞍点法

(4.1)の積分を鞍点法で実行する。

$$\Pi_E(E_0, 0, r, t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \frac{\varepsilon^3}{E_s^2} \int_c e^{f_E(s)} ds \quad (4.3)$$

と表す。ただし,

$$\begin{aligned} f_E(s) &= s \ln \frac{E_0}{\varepsilon} + \ln H_1(s) + \lambda_1(s)t \\ &+ \ln \mathfrak{M}_E(s, E_0, r). \end{aligned} \quad (4.4)$$

$H_1(s)$ の変化は他の量に比べて緩いため

$H_1'(s) \approx 0$ と見做すことができる。カスケ

ード理論でよく用いるこの近似をここでも採用する。鞍点 (エイジ) は

$$f_E'(s) = \ln \frac{E_0}{\varepsilon} + \lambda_1'(s)t + \frac{\mathfrak{M}'_E}{\mathfrak{M}_E} = 0 \quad (4.5)$$

の解である (s_1 と記す)。

$f_E(s)$ を s_1 の近傍で展開して積分を実行する。

$$\int_c e^{f_E(s)} ds = e^{f_E(s_1)} \int_c e^{(1/2)f_E''(s_1)(s-s_1)^2} ds.$$

積分路 c を, s_1 を通り虚軸に平行な直線に

とる: $s = s_1 + i\sigma$ ($-\infty < \sigma < \infty$).

積分は σ についてガウス積分となって,

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, 0, r, t) &= \frac{1}{4\pi^2} e^{f_E(s_1)} \sqrt{\frac{2\pi}{f_E''(s_1)}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\varepsilon^3}{E_s^2} \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^{s_1} H_1(s_1) e^{\lambda_1(s_1)t} \\ &\times \frac{\mathfrak{M}_E(s_1, E_0, r)}{\sqrt{\lambda_1''(s_1)t + (\mathfrak{M}'_E/\mathfrak{M}_E)'|_{s_1}}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

入射エネルギーは $E_0/\varepsilon = 10^8, 10^6, 10^4,$

10^3 の 4 種類とし, 深さ t は各エネルギーの入射電子が創るシャワーの最大発達時の深さ (Optimum thickness) T とする。

$$t = T = -\frac{1}{\lambda_1'(1)} \left(\ln \frac{E_0}{\varepsilon} - 1 \right). \quad (4.7)$$

\mathfrak{M}_E の微分は次のように行う:

$$\ln \mathfrak{M}_E = \sum_{k=0}^n c_k s^k, \quad (n=6) \quad (4.8)$$

と多項式近似で近似して微分する。

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}'_E / \mathfrak{M}_E &= \sum_{k=1}^n k c_k s^{k-1}, \\ (\mathfrak{M}'_E / \mathfrak{M}_E)' &= \sum_{k=2}^n k(k-1) c_k s^{k-2}. \end{aligned} \right\} (4.9)$$

$E_0/\varepsilon = 10^3$ とした, $10^{-8} \leq \varepsilon r/E_s \leq 20$ に

おける $\ln \mathfrak{M}_E(s, E_0, r)$ を図 5 に示す。

多項式近似が容易な関数形である。

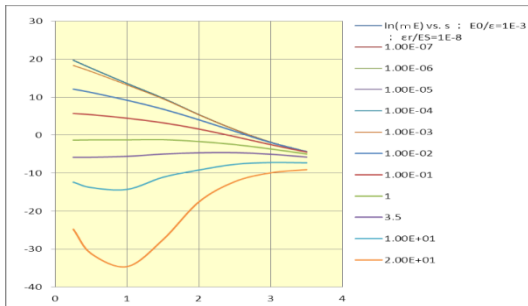


図 5 $\ln \mathfrak{M}_E$ vs. s ; $E_0/\varepsilon = 10^3$

(4.5)から得た s_1 を図 6 に示す。

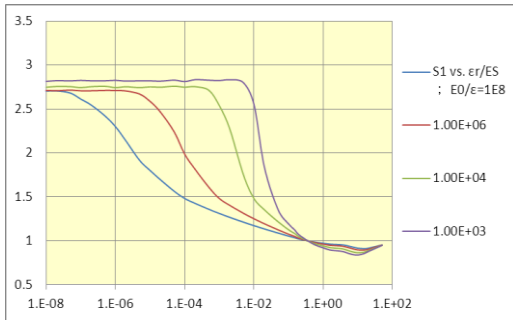


図 6. エイジ s_1 vs. $\varepsilon r/E_s$

どの入射エネルギーにも共通してエイジの変化に特徴がある。コアから外へ向かって一定値→急減→収束→漸増と変化し、収束値は $s_1 \approx 1(\varepsilon r/E_s \approx 0.4)$ 。その後、大小関係が逆転する。

4.2. エネルギー流ラテラル分布関数

エネルギー流ラテラル分布関数,

$$\Pi_E(E_0, 0, r, T) / (\varepsilon^3 / E_s^2) =$$

$$= \frac{(E_0/\varepsilon)^{s_1} H_1(s_1) e^{\lambda_1(s_1)T} \mathfrak{M}_E(s_1, E_0, r)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{\lambda_1''(s_1)T + (\mathfrak{M}'_E / \mathfrak{M}_E)' |_{s_1}}} \quad (4.10)$$

を図 7 に示し、数値を第 V 稿補遺に示す。

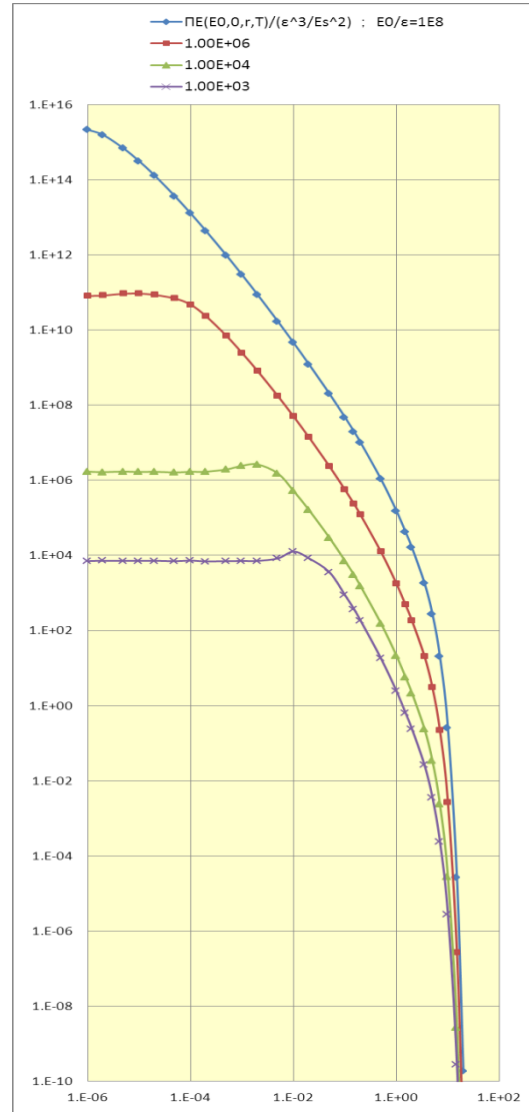


図 7. 電子エネルギー流ラテラル分布関数

$$\Pi_E(E_0, 0, r, T) / (\varepsilon^3 / E_s^2) \text{ vs. } \varepsilon r/E_s$$

なお \mathfrak{M}_E 中の不完全ガンマ関数の数値は文献 2) に依る。

4.3. 分布関数の特徴

(i) コア・中間・遠方の 3 領域で分布の形

状に § 2.1 で述べた変化の様子が見える。

(ii) $E_0/\varepsilon = 10^4, 10^3$ の低い入射エネルギーの分布において、平坦からベキへ変化する境界領域で膨らみ（凸）が現れる。

形状の直接的比較には規格化した関数；

$$\int_0^\infty \tilde{\Pi}_E(E_0, 0, r, T) 2\pi \frac{\varepsilon r}{E_s} d\left(\frac{\varepsilon r}{E_s}\right) = 1 \quad (4.11)$$

の比較が適切である（図 8）。

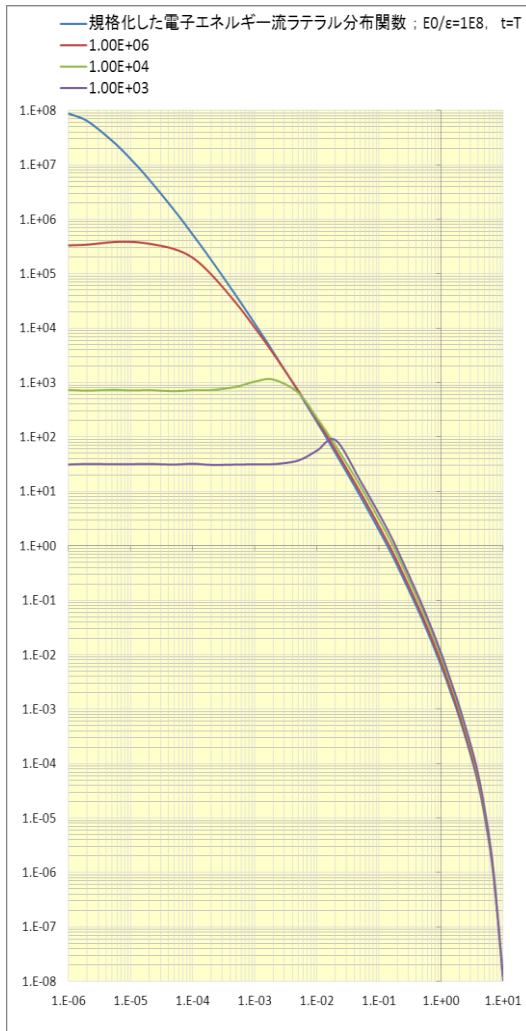


図 8 規格化した $\tilde{\Pi}_E(E_0, 0, r, T)$

(iii) 中間領域 ($1 \times 10^{-2} \leq \varepsilon r / E_s \leq 1$) 以遠で図形はほとんど重なる。中間領域ではほぼ単一のベキで表される。ベキの値は入射

エネルギーに依らずほぼ -2.3 。

(iv) 分布にみえる凸は E_0/ε が大きくなるにしたがって薄れていく。

凸の出現は補遺 II で考察する。

参考文献

1) 新居誠彦, 足利大学研究集録第 56 号 (2021.3). 【足利大学 足利短期大学 学術情報リポジトリ <https://ashitech.repo.nii.ac.jp> に掲載】

2) 次のサイト
<https://keisan.casio.jp/exec/system/1161228685>

3) 新居誠彦, 足利大学研究集録第 54 号 (2019.3). この文献・第 I 稿(6.8)式中の $C_i(s), \alpha_i(s)$ は当論文における $D_j(s), \beta_j(s)$ ($1 \leq i, j \leq 6$) に相当する。

補遺 I. $\Pi_E(E_0, 0, r, t)$ の体積

エネルギー流ラテラル分布関数の体積はエネルギー流遷移曲線を与えなければならない。それを確認する。

$$\int_0^\infty \Pi_E(E_0, 0, r, t) 2\pi r dr = V_E(E_0, 0, t)$$

とおく。 r に関する積分 I は次の型である。

$$I = \frac{1}{2} a^{-p/2-1} \int_0^\infty x^{p/2} \Gamma(-p/2, x) dx.$$

ここに $p = s - 3$ または $p = s - 2$,

$$a = \frac{(\varepsilon \beta_j(s))^2}{\alpha_i(s) E_s^2} \text{ または } a = \frac{E_0^2}{\alpha_i(s) E_s^2}.$$

$$\int_0^\infty x^\mu \Gamma(\nu, x) dx = (\mu + \nu)! / (\mu + 1)$$
 を用い

ると $I = a^{-p/2-1}/(p+2)$. ゆえに

$$V_E(E_0, 0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c E_0^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times \left[\frac{1}{s-1} \sum_{j=1}^N D_j(s) \left\{ \frac{1}{(\varepsilon \beta_j(s))^{s-1}} - \frac{1}{E_0^{s-1}} \right\} \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon}{s} \sum_{j=1}^N D_j(s) \beta_j(s) \left\{ \frac{1}{(\varepsilon \beta_j(s))^s} - \frac{1}{E_0^s} \right\} \right].$$

ここで恒等式 $\sum_{i=1}^M C_i(s) = 1$ を用いた。

一方, B 近似エネルギー流遷移曲線は次式から求められる。3)

$$\Pi_E(E_0, E, t) = \int_E^{E_0} E \pi(E_0, E, t) dE.$$

主要項近似^{※)}のもとで,

$$\pi(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c E_0^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times \sum_{j=1}^N \frac{D_j(s)}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^{s+1}}.$$

よって,

$$\Pi_E(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c E_0^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \sum_{j=1}^N D_j(s)$$

$$\times \left\{ \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^{s-1}} - \frac{1}{(E_0 + \varepsilon \beta_j(s))^{s-1}} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{\varepsilon \beta_j(s)}{s} \left(\frac{1}{(E + \varepsilon \beta_j(s))^s} - \frac{1}{(E_0 + \varepsilon \beta_j(s))^s} \right) \right\}.$$

$E \rightarrow 0$ とする。 $\varepsilon \ll E_0$ だから上の各括弧

内第 2 項における $\varepsilon \beta_j(s)$ は省略できる。

$$\therefore V_E(E_0, 0, t) = \Pi_E(E_0, 0, t).$$

B 近似エネルギー流ラテラル分布関数の体積は期待通り B 近似エネルギー流遷移曲線を与えることが確かめられた。

※) $H_2(s) e^{\lambda_2(s)t}$ の項を無視する近似。
 $t \geq 2$ なら可能である。

補遺 II. エネルギー流ラテラル分布関数に凸が現れることの検討

図 7 または図 8 にみるように入射エネルギーの低い方の分布の形状に膨らみ(凸)がある。分布関数を構成する 4 つの関数:

$$(E_0/\varepsilon)^s, \mathfrak{M}_E(s_1, E_0, r), H_1(s_1) e^{\lambda_1(s_1)T},$$

$1/\sqrt{\lambda_1 T + (\mathfrak{M}'_E/\mathfrak{M}_E)'}$ はエイジを通して $\varepsilon r/E_s$ に依存する。このうち

$\mathfrak{M}_E(s_1, E_0, r)$ は顕著な凸をもつ (図 A-1)。しかしこの凸がラテラル分布関数の凸に照応するのではない。頂点の位置がずれているからである。

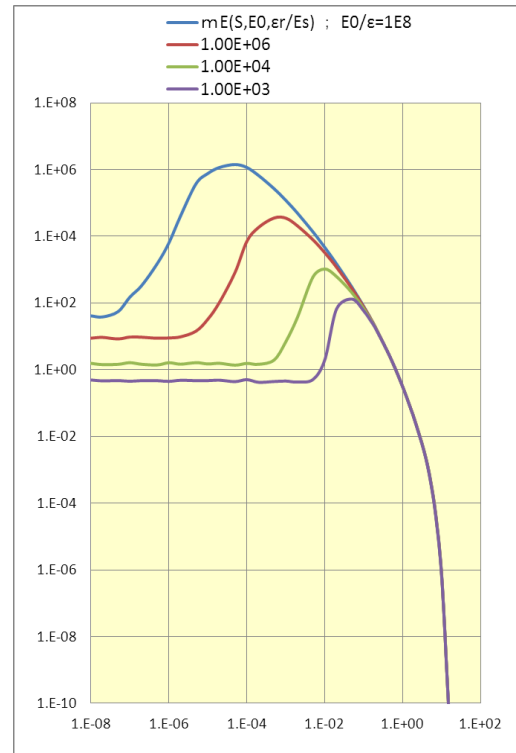


図 A-1 $\mathfrak{M}_E(s_1, E_0, r)$ vs. $\varepsilon r/E_s$

それどころか \mathfrak{M}_E のこの形状は強力な減少関数 $(E_0/\varepsilon)^s$ に飲み込まれてしまう。

両者の積 $(E_0/\varepsilon)^{s_1} \times \mathfrak{M}_E$ を「第 1 複合関数」と呼ぶことにする。第 1 複合関数は単調減少関数となるのである (図 A-2)。

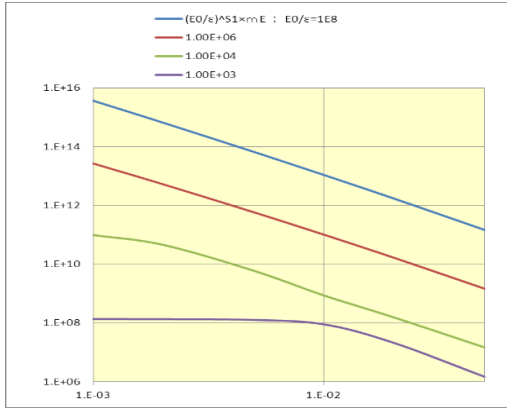


図 A-2 第 1 複合関数 $(E_0/\varepsilon)^{s_1} \mathfrak{M}_E(s_1, E_0, r)$ vs. $\varepsilon r/E_s$

では分布関数に凸の現れる理由は何か。もう一つの積の関数；

$$H_1 e^{\lambda_1 T} \times 1/\sqrt{\lambda_1'' T + (\mathfrak{M}'_E/\mathfrak{M}_E)'}$$

を「第 2 複合関数」と呼ぶことにする。この形状を示す (図 A-3)。

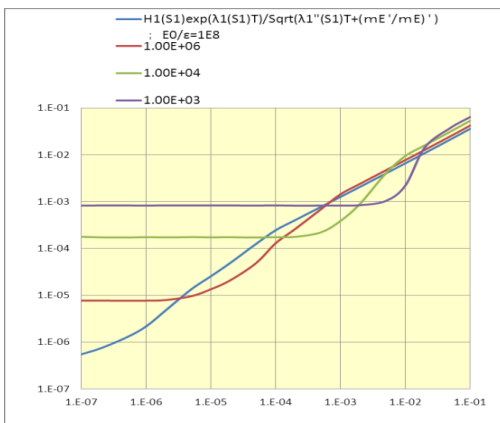


図 A-3 第 2 複合関数 $H_1(s_1) e^{\lambda_1(s_1) T} / \sqrt{\lambda_1''(s_1) T + (\mathfrak{M}'_E/\mathfrak{M}_E)'}$ vs. $\frac{\varepsilon r}{E_s}$

第 2 複合関数は増加関数である。つまり第 2 と第 1 の 2 つの複合関数が共に作用して凸を形成することになる。この事情を

E_0/ε 別に見てみる (図 A-4, A-5)。ただし図を見易くするため、起点において各々の関数値を 1 に規格化した。

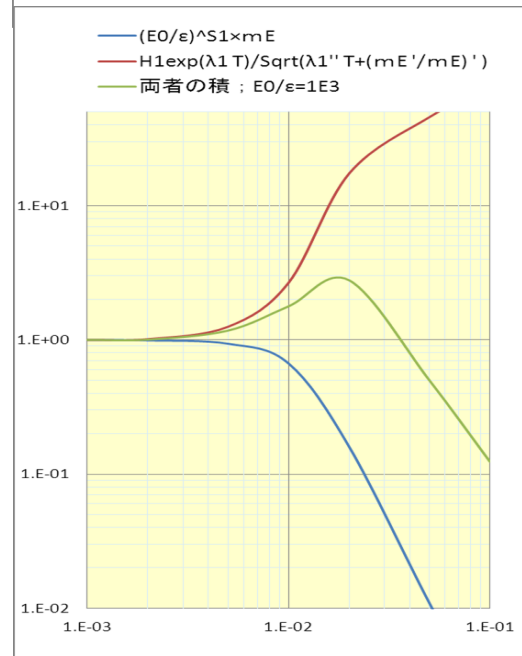
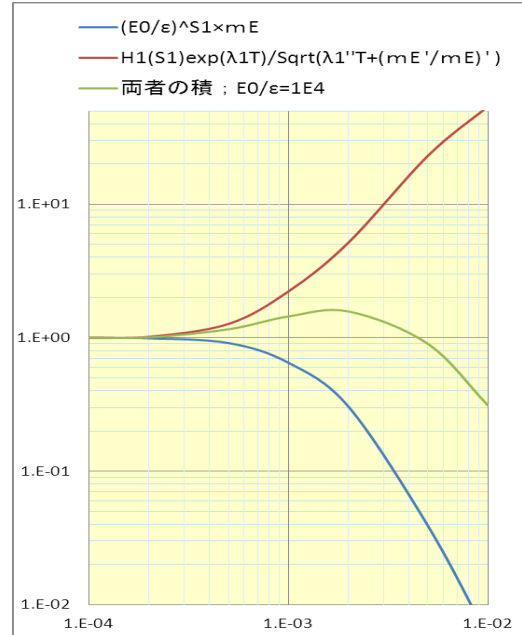


図 A-4 (上, $E_0/\varepsilon = 10^4$)

図 A-5 (下, $E_0/\varepsilon = 10^3$)

2 つの複合関数とその積

2 つの複合関数の積に凸が現れる原因がみえる。すなわち第 2 複合関数の増加率が第 1 複合関数の減少率を上回る範囲があ

ることである。では何故、第 2 複合関数に急増する範囲が生じるのか？ この範囲はエイジが急減する範囲と重なる (図 6)。

第 2 複合関数は

$$H_1(s), e^{\lambda_1(s)T}, 1/\sqrt{\lambda_1''(s)T + (\mathfrak{M}'_E/\mathfrak{M}_E)'}$$

の 3 つの要素で構成される。3 要素と第 2 複合関数との関係を $E_0/\varepsilon = 10^4$ と 10^3 について別々に図示する (図 A-6, A-7)。

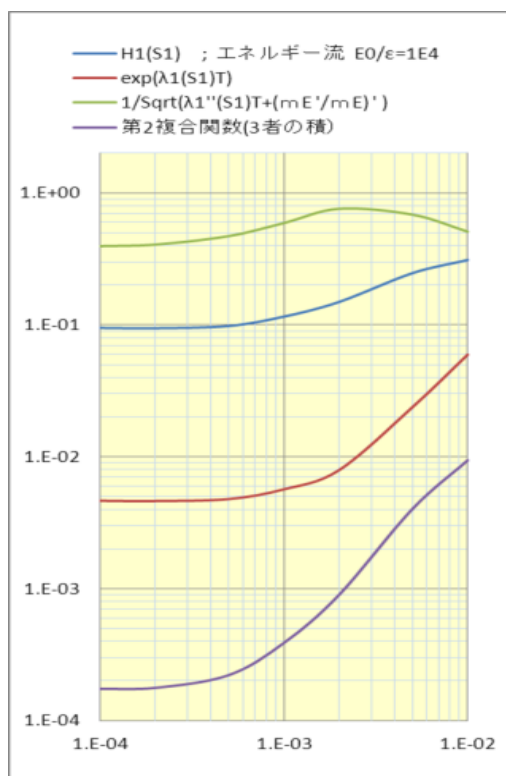


図 A-6

第 2 複合関数の急増と構成要素との関係 ($E_0/\varepsilon = 10^4$)

どちらの図にも第 2 複合関数 (紫) の急増する様子がみえる。急増する範囲は各々

$$\varepsilon r/E_s = (1 \sim 3) \times 10^{-3}, (1 \sim 2) \times 10^{-2}$$

この範囲で 3 要素はそろって増加を示す。つまり第 2 複合関数を構成する 3 要素の $\varepsilon r/E_s$ に対する変化率が 3 つとも正の範囲では

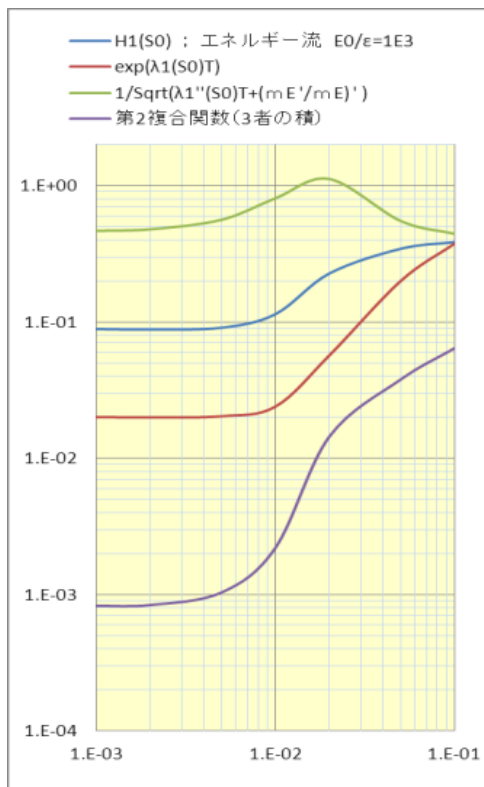


図 A-7

第 2 複合関数の急増と構成要素との関係 ($E_0/\varepsilon = 10^3$)

第 2 複合関数は急増する。この増加率と第 1 複合関数の減少率とが競い合う。双方が釣合った点で凸は頂点に至る。その後は、一つの要素 (緑) の変化率が負になって全体 (紫) の増加率は緩くなり形状は逆になる。2 つの複合関数のこうした振る舞いが凸を形成する原因である。この振る舞いの背景に図 6 にみるようなエイジの急激な減少がある。加えてこの急減さは入射エネルギーの低い方に著しい。

まとめ：分布関数に凸をもたらす要因

入射エネルギーの低い方の、エネルギー流分布関数に顕著な膨らみ (凸) が出る。分布関数はいくつかの関数で構成される。

それらの関数は減少関数と増加関数の 2 組みに分けられる。よって分布関数の形はその減少率と増加率との競合できまる。全体的に減少率が優勢であるが、エイジの急激な変化が原因となって増加率が急増する範囲が一部に生じる。その範囲においては増加率が減少率を凌ぐため 2 つの関数の積は増加する。すなわち分布の形状は上

.....
※ 足利大学名誉教授

頂点となる。その位置を過ぎれば増加率は緩くなり分布の形は下に向く。こうして凸が形成される。つまり凸を出現させる要因はエイジの大きな変化（減少）率と構成関数の構造とにある。このことは電子数分布関数の形状にも凸の出現を示唆する。

第 V 稿で電子数ラテラル分布関数の数値計算を行う。

原稿受付日 令和 4 年 1 月 1 日