

3次元電磁カスケード B 近似理論

エネルギー流ラテラル分布関数の計算

Ⅲ. 散乱過程・電離損失過程の漸化式の計算

新居 誠彦*

A Calculation of Energy-flow Lateral Distribution Function under Approximation B

in Three Dimensional Electron-Photon Cascade Theory.

Ⅲ. Calculation of Recurrence Formulae in Scattering

Process and in Ionization-loss Process.

NII Nobuhiko

Abstract

We calculate the electron energy-flow lateral distribution function under Approximation B in the three-dimensional cascade theory.

In the cascade theory, there appear two types of recurrence formula; the one is in the three-dimensional scattering process, and the other in the one-dimensional ionization-loss process. We calculate these formulae.

Keywords : three-dimensional cascade theory, energy-flow lateral distribution function, Approximation A, Approximation B, recurrence formula.

1. はじめに

第 I 稿で導入した樹形モデルにおいて散乱過程 (1次元 A 近似過程) と電離損失過程 (3次元 B 近似過程) を記述する 2 つの漸化式を得た。

$$\begin{aligned} & \Phi_{m0}(s, \xi - t, t) \\ &= \int_0^t \phi_{00}(s, t - t') (\xi - t')^2 dt' Q_0 \Phi_{m-10}(s, \xi - t', t'), \end{aligned}$$

および

$$\phi_{mn}(s, t) = \int_0^t \phi_{00}(s, t - t') dt' Q_0 \phi_{mn-1}(s, t').$$

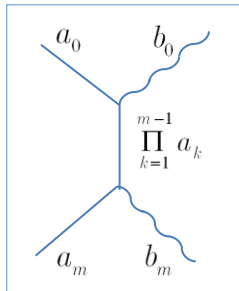
これらの計算を行う。

2. 散乱過程漸化式の計算

第 I 稿 § 7.2.1 で得た定理(i)は初期と終期を除

く中間過程は $\Phi_{m0}(s, \xi - t, t)$ の第(1,1)成分のみを用いればよいことを示した。よって計算は行列でなくスカラーで扱えばよい。また初期条件・終条件をともに電子成分の創る電子成分 $a_0 \cdot a_m$ を対象にすれば用いる関数はすべて同じ型でよい:

$$a_k = \sum_{i=1,2} H_i(s+2k) e^{\lambda_i(s+2k)t} \quad (0 \leq k \leq m).$$



漸化式の計算に 2 つの方法が可能である。

(1) $(\xi - t)$ のベキで表す方法, (2) 逐次微分法。

次の § § 2.1, 2.2 で各々を示す。

2.1. $(\xi - t)$ のベキで表す方法

$$\begin{aligned} \Phi_{m0}(s, \xi - t, t) &= \int_0^t \phi_{00}(s+2m, t-t') \\ &\times (\xi - t')^2 \Phi_{m-10}(s, \xi - t', t') dt', \\ \Phi_{00}(s, \xi - t, t) &= \phi_{00}(s, t) = \sum_{i=1,2} H_i(s) e^{\lambda_i(s)t}. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

第 1 項:

$$\begin{aligned} \Phi_{10}(s, \xi - t, t) &= \sum_{j,i=1,2} H_j(s+2) H_i(s) e^{\lambda_j(s+2)t} \\ &\times \int_0^t e^{(\lambda_i(s) - \lambda_j(s+2))t'} (\xi - t')^2 dt' \end{aligned}$$

を計算する。はじめに次の略記を導入する:

$$i_0, i_1, \dots, i_m = 1, 2 \text{ として,}$$

$$\left. \begin{aligned} H_{i_0} &= H_{i_0}(s), H_{i_1} = H_{i_1}(s+2), \\ \dots, H_{i_m} &= H_{i_m}(s+2m), \\ \lambda_{i_0} &= \lambda_{i_0}(s), \lambda_{i_1} = \lambda_{i_1}(s+2), \\ \dots, \lambda_{i_m} &= \lambda_{i_m}(s+2m), \\ \lambda_{i_0 i_1} &= \lambda_{i_0} - \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_0 i_m} = \lambda_{i_0} - \lambda_{i_m}. \end{aligned} \right\} (2.1.2)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{10}(s, \xi - t, t) &= \sum_{i_1, i_0} H_{i_1} H_{i_0} e^{\lambda_{i_1} t} \int_0^t e^{\lambda_{i_0 i_1} t'} (\xi - t')^2 dt' \\ &= \sum_{i_1, i_0} H_{i_1} H_{i_0} \\ &\times \left\{ e^{\lambda_{i_0} t} \left(\frac{(\xi - t)^2}{\lambda_{i_0 i_1}} + \frac{2(\xi - t)}{\lambda_{i_0 i_1}^2} + \frac{2}{\lambda_{i_0 i_1}^3} \right) \right. \\ &\left. - e^{\lambda_{i_1} t} \left(\frac{\xi^2}{\lambda_{i_0 i_1}} + \frac{2\xi}{\lambda_{i_0 i_1}^2} + \frac{2}{\lambda_{i_0 i_1}^3} \right) \right\}. \end{aligned}$$

積分下限からの寄与は $e^{\lambda_1(s+2)t}, e^{\lambda_2(s+2)t}$ を含む項である。これらの項から派生して、高次になれば $e^{\lambda_1(s+2)t}, e^{\lambda_2(s+2)t}, e^{\lambda_1(s+4)t}, e^{\lambda_2(s+4)t}, \dots$ を含む項が

現れる。主要項近似^{※)}のもとでこれらはすべて無視できる。よって初めから積分下限は考慮しなくてよい。 t のベキも現れない。さらに $i_0 = 2$ の項

$H_2(s) e^{\lambda_2(s)t}$ も初めから無視してよい。

$$\begin{aligned} \Phi_{10}(s, \xi - t, t) &= H_{i_0} e^{\lambda_{i_0} t} \\ &\times \sum_{i_1=1,2} H_{i_1} \left(\frac{(\xi - t)^2}{\lambda_{i_0 i_1}} + \frac{2(\xi - t)}{\lambda_{i_0 i_1}^2} + \frac{2}{\lambda_{i_0 i_1}^3} \right) \\ &= H_{i_0} e^{\lambda_{i_0} t} \sum_{i_1=1,2} H_{i_1} \sum_{k=0}^2 C_k^{(1)}(s) (\xi - t)^k, (i_0 = 1). \end{aligned}$$

この結果から

$$\begin{aligned} \Phi_{m0}(s, \xi - t, t) &= H_{i_0} e^{\lambda_{i_0} t} \\ &\times \sum_{i_m, \dots, i_1=1,2} H_{i_m} \dots H_{i_1} \sum_{k=0}^{2m} C_k^{(m)}(s) (\xi - t)^k \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

※) $e^{\lambda_i(s)t}$ を含む項のみを採用する近似。 $e^{\lambda_2(s)t}$ や $e^{\lambda_i(s')t}$ ($s' > s, i=1,2$) を捨てる。 $t \geq 2$ なら十分可能。

の形が推測できる。一方、漸化関係から

$$\begin{aligned} \Phi_{m0}(s, \xi - t, t) &= \int^t \phi_{00}(s + 2m, t - t')(\xi - t')^2 \\ &\times \Phi_{m-10}(s, \xi - t', t') dt' \\ &= H_{i_0} \left(\sum_{i_m, \dots, i_1=1,2} H_{i_m} \cdots H_{i_1} \sum_{k=0}^{2m-2} C_k^{(m-1)}(s) \right) \\ &\times \int^t e^{\lambda_{i_m}(t-t') + \lambda_{i_0} t'} (\xi - t')^{k+2} dt'. \end{aligned}$$

積分部分は $e^{\lambda_{i_m} t + \lambda_{i_0} \xi} \int^{\xi-t} x^{k+2} e^{-\lambda_{i_0} x} (-dx)$ と表される。

$$\begin{aligned} &\int^{\xi-t} x^{k+2} e^{-\lambda_{i_0} x} (-dx) \\ &= (-1) e^{-\lambda_{i_0}(\xi-t)} \sum_{j=0}^{k+2} \frac{(k+2)!}{j!} \frac{(\xi-t)^j}{\lambda_{i_0}^{k+3-j}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{m0}(s, \xi - t, t) &= H_{i_0} e^{\lambda_{i_0} t} \sum_{i_m, \dots, i_1=1,2} H_{i_m} \cdots H_{i_1} \\ &\times \sum_{k=0}^{2m-2} C_k^{(m-1)}(s) \sum_{j=0}^{k+2} \frac{(k+2)!}{j!} \frac{(\xi-t)^j}{\lambda_{i_0}^{k+3-j}}. \quad (2.1.4) \end{aligned}$$

$$2 \text{ 重和 } \sum_{k=0}^{2m-2} C_k^{(m-1)}(s) \sum_{j=0}^{k+2} \frac{(k+2)!}{j!} \frac{(\xi-t)^j}{\lambda_{i_0}^{k+3-j}} = A$$

の、和の順序を交換すると、

$$A = \sum_{j=0}^{2m} \frac{(\xi-t)^j}{j!} \sum_{k=j-2 \geq 0}^{2m-2} \frac{(k+2)!}{\lambda_{i_0}^{k+3-j}} C_k^{(m-1)}(s).$$

k の和において k を $k+j-2$ と書き換える：

$$\sum_{k=0}^{2m-j} \frac{(k+j)!}{\lambda_{i_0}^{k+1}} C_{k+j-2}^{(m-1)}(s).$$

A において文字 k と j を交換すると、

$$A = \sum_{k=0}^{2m} \frac{(\xi-t)^k}{k!} \sum_{j=0}^{2m-k} \frac{(k+j)!}{\lambda_{i_0}^{j+1}} C_{k+j-2}^{(m-1)}(s).$$

$(\xi-t)^k$ の係数が $C_k^{(m)}(s)$ だから次式を得る。

$$C_k^{(m)}(s) = \sum_{k=0}^{2m} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{2m-k} \frac{(k+j)!}{\lambda_{i_0}^{j+1}} C_{k+j-2}^{(m-1)}(s). \quad (2.1.5)$$

ただし $C_0^{(0)}(s) = 1, C_{-1}^{(m-1)}(s) = C_{-2}^{(m-1)}(s) = 0$.

この $C_k^{(m)}(s)$ を用いて、

$$\begin{aligned} \Phi_{m0}(s, \xi - t, t) &= H_{i_0} e^{\lambda_{i_0} t} \\ &\times \sum_{i_m, \dots, i_1=1,2} H_{i_m} \cdots H_{i_1} \sum_{k=0}^{2m} C_k^{(m)}(s) (\xi - t)^k. \end{aligned}$$

ここで極限 $(\xi - t) \rightarrow 0$ をとる。

$$\begin{aligned} \lim_{(\xi-t) \rightarrow 0} \Phi_{m0}(s, \xi - t, t) &= \Phi_{m0}(s, 0, t) \\ &= H_{i_0} e^{\lambda_{i_0} t} \sum_{i_m, \dots, i_1=1,2} H_{i_m} \cdots H_{i_1} C_0^{(m)}(s), \quad (2.1.6) \end{aligned}$$

($i_0 = 1$).

$\Phi_{m0}(s, 0, t)$ には $C_0^{(m)}(s)$ のみが寄与する。

2.1.1. $C_k^{(m)}(s)$ のベクトル表示

$C_k^{(m)}(s)$ はベクトルで表すことができる。

$$C_k^{(m)}(s) = GR, \quad (2.1.7)$$

$$G = \frac{1}{k!} \left(\frac{(2m)!}{\lambda_{i_0}^{2m-k+1}} \quad \frac{(2m-1)!}{\lambda_{i_0}^{2m-k}} \quad \cdots \quad \frac{k!}{\lambda_{i_0}^1} \right),$$

$$R = \begin{pmatrix} C_{2m-2}^{(m-1)}(s) \\ C_{2m-3}^{(m-1)}(s) \\ \cdots \\ C_{k-2}^{(m-1)}(s) \end{pmatrix}.$$

2.1.2. 一般項の行列表示

一般項は規則性があり見通しよく表される。対角線はすべて $1/\lambda_{i_0^{i_m}}$.

$${}^t(C_{2m}^{(m)}(s) \ C_{2m-1}^{(m)}(s) \ \cdots \ C_2^{(m)}(s) \ C_1^{(m)}(s) \ C_0^{(m)}(s)) =$$

$$= \left\{ \sum_{i_m=1,2} H_{i_m} \begin{pmatrix} \frac{1}{(2m)!} \frac{(2m)!}{\lambda_{i_0^{i_m}}^1} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{(2m-1)!} \frac{(2m)!}{\lambda_{i_0^{i_m}}^2} & \frac{1}{(2m-1)!} \frac{(2m-1)!}{\lambda_{i_0^{i_m}}^1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2!} \frac{(2m)!}{\lambda_{i_0^{i_m}}^{2m-1}} & \frac{1}{2!} \frac{(2m-1)!}{\lambda_{i_0^{i_m}}^{2m-2}} & \cdots & \frac{1}{2!} \frac{2!}{\lambda_{i_0^{i_m}}^1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{1!} \frac{(2m)!}{\lambda_{i_0^{i_m}}^{2m}} & \frac{1}{1!} \frac{(2m-1)!}{\lambda_{i_0^{i_m}}^{2m-1}} & \cdots & \frac{1}{1!} \frac{2!}{\lambda_{i_0^{i_m}}^2} & \frac{1}{1!} \frac{1!}{\lambda_{i_0^{i_m}}^1} & 0 \\ \frac{(2m)!}{\lambda_{i_0^{i_m}}^{2m+1}} & \frac{(2m-1)!}{\lambda_{i_0^{i_m}}^{2m}} & \cdots & \frac{2!}{\lambda_{i_0^{i_m}}^3} & \frac{1!}{\lambda_{i_0^{i_m}}^2} & \frac{1}{\lambda_{i_0^{i_m}}^1} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} C_{2m-2}^{(m-1)}(s) \\ C_{2m-3}^{(m-1)}(s) \\ \vdots \\ C_0^{(m-1)}(s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.8)$$

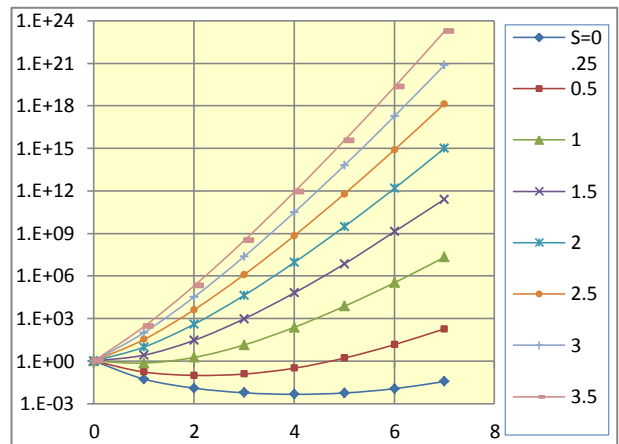
$$C_0^{(0)}(s) = 1, C_{-1}^{(m-1)}(s) = C_{-2}^{(m-1)}(s) = 0. \quad (2.1.9)$$

2.1.3 $C_0^{(m)}(s)$ の数値とグラフ

$s = 0.25 \sim 3.5, 0 \leq m \leq 7$ の $C_0^{(m)}(s)$ の値とグラフを次に示す。

m \ S→	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.053435	0.169399	0.722642	2.618061	9.675977	33.36395	101.3432	270.6016
2	0.01233	0.097707	1.80082	28.95612	397.177	4150.986	32685.53	200568.2
3	0.005763	0.121316	13.70191	954.3612	42947.86	1239936	23507214	3.11E+08
4	0.004506	0.313609	238.8896	63518.97	8893027	6.86E+08	3.04E+10	8.4E+11
5	0.005607	1.62028	7237.73	6979322	2.99E+09	6.06E+11	6.18E+13	3.52E+15
6	0.01123	14.31094	329640.5	1.31E+09	1.47E+12	7.8E+14	1.82E+17	2.12E+19
7	0.036165	185.89	20845805	2.56E+11	9.95E+14	1.37E+18	7.29E+20	1.73E+23

第 1 表 $C_0^{(m)}(s)$ の値



第 1 図 $C_0^{(m)}(s)$ vs. m

2.2. 逐次微分法

漸化式 ;

$$\begin{aligned} & \Phi_{m0}(s, \xi - t, t) \\ &= \int^t \phi_{00}(s + 2m, t - t') (\xi - t')^2 dt' \\ & \times \Phi_{m-10}(s, \xi - t', t'), \quad (2.2.1) \\ & \phi_{00}(s + 2m, t) = \sum_{i_m=1,2} H_{i_m} e^{\lambda_{i_m} t}, \end{aligned}$$

$\Phi_{00}(s, \xi - t, t) = \phi_{00}(s, t)$
 において次の関係が成り立つ。

$$(1) (\xi - t')^2 = (\partial/\partial a)^2 e^{-a(\xi - t')} \Big|_{a=0}$$

と表すことができる。

$$(2) \phi_{00}(s + 2m, t - t') \Phi_{m-10}(s, \xi - t', t')$$

に指数関数 $e^{\lambda_{i_0 m} t'}$ が含まれるので漸化式の積分は直ちに求められる： $e^{\lambda_{i_0 m} t - a(\xi - t)} / (a + \lambda_{i_0 m})$ 。

(3) $\Phi_{m0}(s, \xi - t, t)$ はこのような計算を m 回重ねて得られる。

$$\begin{aligned} & \int^t \phi_{00}(s + 2m, t - t') e^{-a_m(\xi - t')} dt' \\ & \times \Phi_{m-10}(s, \xi - t', t') \\ &= f(a_m, \dots, a_1, s, \xi - t, t) \quad (2.2.2) \end{aligned}$$

と表すと

$$\begin{aligned} & \Phi_{m0}(s, \xi - t, t) = (\partial/\partial a_m)^2 \dots (\partial/\partial a_1)^2 \\ & \times f(a_m, \dots, a_1, s, \xi - t, t) \Big|_{a_m=\dots=a_1=0} \cdot \quad (2.2.3) \end{aligned}$$

$f(a_m, \dots, a_1, s, \xi - t, t)$ の初めの 2 項を示す。

主要項近似の下で $i_0 = 2$ の項を捨てることのできるので、

$$f(a_1, s, \xi - t, t) =$$

$$\begin{aligned} &= \int^t \phi_{00}(s + 2, t - t') e^{-a_1(\xi - t')} \phi_{00}(s, t') dt' \\ &= \sum_{i_1=1,2, i_0=1} H_{i_1} H_{i_0} \frac{e^{\lambda_{i_0} t - a_1(\xi - t)}}{a_1 + \lambda_{i_0 i_1}}, \\ & f(a_2, a_1, s, \xi - t, t) \\ &= \int^t \phi_{00}(s + 4, t - t') e^{-a_2(\xi - t')} dt' \\ & \times f(a_1, s, \xi - t', t') \\ &= \left\{ \sum_{i_2, i_1=1,2, i_0=1} H_{i_2} H_{i_1} H_{i_0} \right. \\ & \quad \left. \times \frac{e^{\lambda_{i_0} t - (a_2 + a_1)(\xi - t)}}{(a_2 + a_1 + \lambda_{i_0 i_2})(a_1 + \lambda_{i_0 i_1})} \right\}. \end{aligned}$$

これから一般項は次のように得られる。

$$\begin{aligned} & f(a_m, \dots, a_1, s, \xi - t, t) \\ &= \sum_{i_m, \dots, i_1=1,2, i_0=1} H_{i_m} \dots H_{i_1} H_{i_0} e^{\lambda_{i_0} t} \\ & \times \frac{e^{-(a_m + \dots + a_1)(\xi - t)}}{(a_m + \dots + a_1 + \lambda_{i_0 i_m})} \\ & \times \frac{1}{(a_{m-1} + \dots + a_1 + \lambda_{i_0 i_{m-1}})} \times \dots \\ & \times \frac{1}{(a_2 + a_1 + \lambda_{i_0 i_2})(a_1 + \lambda_{i_0 i_1})}. \quad (2.2.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Phi_{m0}(s, \xi - t, t) = \sum_{i_m, \dots, i_1=1,2, i_0=1} H_{i_m} \dots H_{i_1} H_{i_0} e^{\lambda_{i_0} t} \\ & \times (\partial/\partial a_m)^2 \dots (\partial/\partial a_1)^2 \\ & \times \frac{e^{-(a_m + \dots + a_1)(\xi - t)}}{(a_m + \dots + a_1 + \lambda_{i_0 i_m})} \frac{1}{(a_{m-1} + \dots + a_1 + \lambda_{i_0 i_{m-1}})} \\ & \times \dots \frac{1}{(a_1 + \lambda_{i_0 i_1})} \Big|_{a_m=a_{m-1}=\dots=a_1=0} \cdot \quad (2.2.5) \end{aligned}$$

微分を実行するとき、分子の因子から $(\xi - t)$ のべきをもつ項が現れる。計算の最後の段階で $(\xi - t) \rightarrow 0$ とするためこれらの項からの寄与は

消滅する。よって分子の微分は必要ない。

$(\xi - t) \rightarrow 0$ として初めから除く。

$$\begin{aligned} \Phi_{m0}(s, 0, t) &= H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \left\{ \sum_{i_m, \dots, i_1=1,2} H_{i_m} \cdots H_{i_1} \right. \\ &\times (\partial/\partial a_m)^2 \cdots (\partial/\partial a_1)^2 \frac{1}{(a_m + \cdots + a_1 + \lambda_{i_0^{i_m}})} \\ &\times \left. \frac{1}{(a_{m-1} + \cdots + a_1 + \lambda_{i_0^{i_{m-1}}}) \cdots (a_1 + \lambda_{i_0^{i_1}})} \right\}_{a_1=0, \dots, a_m=0}. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

$\Phi_{m0}(s, 0, t)$ は形式的に次のように表すこともできる。

$$\begin{aligned} \Phi_{m0}(s, 0, t) &= H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\ &\times \left(\frac{\partial}{\partial a} \right)^2 \sum_{i_1=1,2} \frac{H_{i_1}}{a + \lambda_{i_0^{i_1}}} \left(\frac{\partial}{\partial a} \right)^2 \sum_{i_2=1,2} \frac{H_{i_2}}{a + \lambda_{i_0^{i_2}}} \cdots \\ &\times \left(\frac{\partial}{\partial a} \right)^2 \sum_{i_m=1,2} \frac{H_{i_m}}{a + \lambda_{i_0^{i_m}}} / a=0. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

(2.2.6)の微分演算は散乱に由来する。散乱項

$E_s^2 x^2 / 4E^2$ に結びつく $(\xi - t)^2$ を $(\partial/\partial a)^2$ が導いたからである。その微分演算は右側 (後方 = 世代の増す向き) へ作用する。すなわち(2.2.7)で散乱の影響は後の世代へ伝播していく。Kalos-Blatt¹⁾ は類似式を得ていた。§ 2.4.で両者の関係に触れる。

2.3. 2つの計算結果の比較

§ 2.1, 2.2 で散乱過程を記述する項

$\Phi_{m0}(s, \xi - t, t)$ の計算を 2 つの異なる方法 ;

$(\xi - t)$ のベキで表す方法と逐次微分の方法で行った。 $\Phi_{10}, \Phi_{20}, \Phi_{30}$ の 3 例について夫々の結果を

以下に示す。

ここで次の略記を用いる :

$$\begin{aligned} \lambda_{1i_1} &= \lambda_1(s) - \lambda_{i_1}(s+2), H_{i_1} = H_{i_1}(s+2), \\ \lambda_{1i_2} &= \lambda_1(s) - \lambda_{i_2}(s+4), H_{i_2} = H_{i_2}(s+4), \\ \lambda_{1i_3} &= \lambda_1(s) - \lambda_{i_3}(s+6), H_{i_3} = H_{i_3}(s+6). \end{aligned}$$

2.3.1. 行列表示に基づく計算結果

$$\Phi_{m0}(s, 0, t) = H_{i_0} e^{\lambda_{i_0} t} \sum_{i_m, \dots, i_1=1,2} H_{i_m} \cdots H_{i_1} C_0^{(m)}(s)$$

の係数 $C_0^{(m)}(s)$ は(2.1.8), (2.1.9)から得られる。

$$\begin{aligned} C_0^{(3)} &= \sum_{i_3=1,2} H_{i_3} \\ &\times \begin{pmatrix} \frac{6!}{\lambda_{i_0^{i_3}}^7} & \frac{5!}{\lambda_{i_0^{i_3}}^6} & \frac{4!}{\lambda_{i_0^{i_3}}^5} & \frac{3!}{\lambda_{i_0^{i_3}}^4} & \frac{2!}{\lambda_{i_0^{i_3}}^3} & \frac{1!}{\lambda_{i_0^{i_3}}^2} & \frac{1}{\lambda_{i_0^{i_3}}} \end{pmatrix} \\ &\times {}^t (C_4^{(2)} \ C_3^{(2)} \ C_2^{(2)} \ C_1^{(2)} \ C_0^{(2)} \ 0 \ 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^t (C_4^{(2)} \ C_3^{(2)} \ C_2^{(2)} \ C_1^{(2)} \ C_0^{(2)}) &= \sum_{i_2=1,2} H_{i_2} \\ &\times \begin{pmatrix} \frac{4!/4!}{\lambda_{i_0^{i_2}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4!/3!}{\lambda_{i_0^{i_2}}^2} & \frac{3!/3!}{\lambda_{i_0^{i_2}}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4!/2!}{\lambda_{i_0^{i_2}}^3} & \frac{3!/2!}{\lambda_{i_0^{i_2}}^2} & \frac{2!/2!}{\lambda_{i_0^{i_2}}} & 0 & 0 \\ \frac{4!/1!}{\lambda_{i_0^{i_2}}^4} & \frac{3!/1!}{\lambda_{i_0^{i_2}}^3} & \frac{2!/1!}{\lambda_{i_0^{i_2}}^2} & \frac{1!/1!}{\lambda_{i_0^{i_2}}} & 0 \\ \frac{4!}{\lambda_{i_0^{i_2}}^5} & \frac{3!}{\lambda_{i_0^{i_2}}^4} & \frac{2!}{\lambda_{i_0^{i_2}}^3} & \frac{1!}{\lambda_{i_0^{i_2}}^2} & \frac{1}{\lambda_{i_0^{i_2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2^{(1)} \\ C_1^{(1)} \\ C_0^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} C_2^{(1)} \\ C_1^{(1)} \\ C_0^{(1)} \end{pmatrix} = \sum_{i_1=1,2} H_{i_1} \begin{pmatrix} \frac{2!/2!}{\lambda_{i_0^{i_1}}} & 0 & 0 \\ \frac{2!/1!}{\lambda_{i_0^{i_1}}^2} & \frac{1!/1!}{\lambda_{i_0^{i_1}}} & 0 \\ \frac{2!}{\lambda_{i_0^{i_1}}^3} & \frac{1!}{\lambda_{i_0^{i_1}}^2} & \frac{1}{\lambda_{i_0^{i_1}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 C_2^{(1)} &= \frac{1}{\lambda_{i_0 i_1}}, C_1^{(1)} = \frac{2}{\lambda_{i_0 i_1}^2}, C_0^{(1)} = \frac{2}{\lambda_{i_0 i_1}^3}. \\
 C_0^{(2)} &= \sum_{i_1, i_2=1,2} H_{i_2} H_{i_1} \\
 &\times \left(\frac{4!}{\lambda_{i_0 i_2}^5} \frac{3!}{\lambda_{i_0 i_2}^4} \frac{2!}{\lambda_{i_0 i_2}^3} \right) \\
 &\times \left(\frac{1}{\lambda_{i_0 i_1}} \frac{2}{\lambda_{i_0 i_1}^2} \frac{2}{\lambda_{i_0 i_1}^3} \right)^t \\
 &= \sum_{i_1, i_2=1,2} H_{i_2} H_{i_1} \\
 &\times \left(\frac{24}{\lambda_{i_0 i_2}^5 \lambda_{i_0 i_1}} + \frac{12}{\lambda_{i_0 i_2}^4 \lambda_{i_0 i_1}^2} + \frac{4}{\lambda_{i_0 i_2}^3 \lambda_{i_0 i_1}^3} \right). \\
 C_0^{(3)} &= \sum_{i_1, i_2, i_3=1,2} H_{i_3} H_{i_2} H_{i_1} \\
 &\times \left\{ \frac{720}{\lambda_{i_0 i_3}^7 \lambda_{i_0 i_2} \lambda_{i_0 i_1}} \right. \\
 &+ \frac{120}{\lambda_{i_0 i_3}^6} \left(\frac{4}{\lambda_{i_0 i_2}^2 \lambda_{i_0 i_1}} + \frac{2}{\lambda_{i_0 i_2} \lambda_{i_0 i_1}^2} \right) \\
 &+ \frac{24}{\lambda_{i_0 i_3}^5} \left(\frac{12}{\lambda_{i_0 i_2}^3 \lambda_{i_0 i_1}} + \frac{6}{\lambda_{i_0 i_2}^2 \lambda_{i_0 i_1}^2} + \frac{2}{\lambda_{i_0 i_2} \lambda_{i_0 i_1}^3} \right) \\
 &+ \frac{6}{\lambda_{i_0 i_3}^4} \left(\frac{24}{\lambda_{i_0 i_2}^4 \lambda_{i_0 i_1}} + \frac{12}{\lambda_{i_0 i_2}^3 \lambda_{i_0 i_1}^2} + \frac{4}{\lambda_{i_0 i_2}^2 \lambda_{i_0 i_1}^3} \right) \\
 &\left. + \frac{2}{\lambda_{i_0 i_3}^3} \left(\frac{24}{\lambda_{i_0 i_2}^5 \lambda_{i_0 i_1}} + \frac{12}{\lambda_{i_0 i_2}^4 \lambda_{i_0 i_1}^2} + \frac{4}{\lambda_{i_0 i_2}^3 \lambda_{i_0 i_1}^3} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

以上の表式において $i_0 = 1$ の項を採用すれば次式が得られる：

$$\Phi_{m0}(s, 0, t) = C_0^{(m)} \cdot H_1(s) e^{\lambda_1(s)t}, (m=1, 2, 3).$$

2.3.2. 逐次微分法による計算結果

この方法による計算は(2.2.6)から実行できる。元々の表記 $\Phi_{m0}(s, 0, t)$ ($m=1, 2, 3$) を、ここでは

それと区別して $\Phi_m(s, t)$ と記す。計算結果は、

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(s, t) &= H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \sum_{i_1=1,2} H_{i_1} \frac{2}{\lambda_{1i_1}^3}, \\
 \Phi_2(s, t) &= H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \\
 &\times \sum_{i_2, i_1=1,2} H_{i_2} H_{i_1} \left(\frac{24}{\lambda_{1i_2}^5 \lambda_{1i_1}} + \frac{12}{\lambda_{1i_2}^4 \lambda_{1i_1}^2} + \frac{4}{\lambda_{1i_2}^3 \lambda_{1i_1}^3} \right), \\
 \Phi_3(s, t) &= H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \sum_{i_3, i_2, i_1=1,2} H_{i_3} H_{i_2} H_{i_1} \\
 &\times \left\{ \left(\frac{720}{\lambda_{1i_3}^7 \lambda_{1i_2}} + \frac{480}{\lambda_{1i_3}^6 \lambda_{1i_2}^2} + \frac{288}{\lambda_{1i_3}^5 \lambda_{1i_2}^3} \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{144}{\lambda_{1i_3}^4 \lambda_{1i_2}^4} + \frac{48}{\lambda_{1i_3}^3 \lambda_{1i_2}^5} \right) \frac{1}{\lambda_{1i_1}} \\
 &\times \left(\frac{240}{\lambda_{1i_3}^6 \lambda_{1i_2}} + \frac{144}{\lambda_{1i_3}^5 \lambda_{1i_2}^2} + \frac{72}{\lambda_{1i_3}^4 \lambda_{1i_2}^3} \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{24}{\lambda_{1i_3}^3 \lambda_{1i_2}^4} \right) \frac{1}{\lambda_{1i_1}^2} \right. \\
 &\left. \times \left(\frac{48}{\lambda_{1i_3}^5 \lambda_{1i_2}} + \frac{24}{\lambda_{1i_3}^4 \lambda_{1i_2}^2} + \frac{8}{\lambda_{1i_3}^3 \lambda_{1i_2}^3} \right) \frac{1}{\lambda_{1i_1}^3} \right\}.
 \end{aligned}$$

以上から $\Phi_{m0}(s, 0, t) = \Phi_m(s, t)$ ($m=1, 2, 3$) が確認される。

異なる二つの計算方法は互いの結果を検証する手段を提供する。両方の計算結果が一致したことは「両者とも正しい」ことを証明している。

2.4. Kalos-Blatt の表式

著者はかつて文献 2) において(2.2.6)が Kalos-Blatt(K-B)の表式と同値であると述べた。しかし「同値」としたのは誤りであった。(2.2.6)から導かれる(2.2.7)は世代の向きが K-B の表式にある世代の向きと逆順だからである。K-B の表式では散乱の影響は世代を遡っていくことになり著者の得た(2.2.6)は K-B の表式と「同値ではない」。因みに文献 1)にある K-B の与えた表式は次式で

ある。

$$\mathfrak{M}_{1,0}(n, s, t) = \Gamma(n+1) H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \times \left[\frac{\partial^2}{\partial a^2} f(n) \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(n-1) \cdots \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(1) \right]_{a=0},$$

$$f(n) = \frac{H_1(s+2n)}{a - \{\lambda_1(s) - \lambda_1(s+2n)\}} + \frac{H_2(s+2n)}{a - \{\lambda_1(s) - \lambda_2(s+2n)\}}.$$

この表式では若い世代ほど微分演算を回数多く受けることになる。つまり散乱の影響が世代を遡及するという不自然な結果を K-B の表式は招くことになる。

3. 1次元 B 近似式の漸化式

電離損失過程 (1次元 B 近似過程) は第 I 稿で述べた樹形モデルの枝の部分である。

$$\phi_{mn}(s, t) = \int_0^t \phi_{00}(s, t-t') dt' Q_0 \phi_{m-1}(s, t').$$

この過程を記述する行列表示の漸化式は幹を記述する行列表示の漸化式と同じ構造をもつ。よって第 I 稿 § 7.2.1 で得た定理(i)がここでも適用できる。このため、漸化式の計算を行列でなくスカラとして扱うことができる。

初期条件と終条件をとともに電子成分の創る電子成分を対象にする。

3.1. 漸化式の計算

1次元 B 近似過程の漸化関係は、

$$\begin{aligned} & \phi_{mn}(s+2m, t) \\ &= \int_0^t \phi_{00}(s+2m+n, t-t') dt' \phi_{m-1}(s+2m, t'). \end{aligned} \quad (3.1)$$

初期条件は

$$\phi_{00}(s+2m, t) = H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} C_0^{(m)}(s). \quad (3.2)$$

$C_0^{(m)}(s)$ は散乱過程を m 回経た幹の状態を表す量である (樹形モデル, 第 I 稿(7.9))。

(3.1)の初めの 2 項を示す。ここでは $s+2m = s'$ と記す。

$$\begin{aligned} \phi_{m1}(s', t) &= \int_0^t \phi_{00}(s'+1, t-t') \phi_{00}(s', t') dt' \\ &= H_1(s) C_0^{(m)}(s) \sum_{i=1,2} H_i(s'+1) \\ &\times \int_0^t e^{\lambda_i(s'+1)(t-t')} e^{\lambda_i(s)t'} dt' \\ &= H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} C_0^{(m)}(s) \sum_{i=1,2} \frac{H_i(s'+1)}{\lambda_1(s) - \lambda_i(s'+1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{m2}(s', t) &= \int_0^t \phi_{00}(s'+2, t-t') \phi_{m1}(s', t') dt' \\ &= H_1(s) C_0^{(m)}(s) \sum_{j,i=1,2} H_j(s'+2) H_i(s'+1) \\ &\times \int_0^t e^{\lambda_i(s'+2)(t-t')} e^{\lambda_i(s)t'} dt' \\ &= H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} C_0^{(m)}(s) \\ &\times \sum_{j,i=1,2} \frac{H_j(s'+2)}{\lambda_1(s) - \lambda_j(s'+2)} \frac{H_i(s'+1)}{\lambda_1(s) - \lambda_i(s'+1)}. \end{aligned}$$

以上から $\phi_{mn}(s', t)$ は

$$\phi_{mn}(s', t) = H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} C_0^{(m)}(s) \rho_n(s') \quad (3.3)$$

の形で表されることがわかる。ここに、

$$\begin{aligned} \rho_n(s') &= \prod_{k=1}^n \left\{ \sum_{i=1,2} \frac{H_i(s'+k)}{\lambda_1(s) - \lambda_i(s'+k)} \right\} \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{(\lambda_1(s) - \lambda_1(s'+k))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s'+k))}, \quad (3.4) \\ &(s' = s+2m). \end{aligned}$$

3.2. ラプラス変換とラプラス逆変換

$$\begin{aligned} \phi_{mn}(s, t) &= \int_0^t \phi_{00}(s+2m+n, t-t') dt' \\ &\times \phi_{mn-1}(s, t'), \\ \phi_{00}(s, t) &= \sum_{i=1,2} H_i(s) e^{\lambda_i(s)t}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

$\text{Re}(\alpha) > \lambda_1(s)$ として(3.5)をラプラス変換する。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mn}(s, \alpha) &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \phi_{mn}(s, t) dt \\ &= \sum_{i=1,2} H_i(s+2m+n) \\ &\times \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \int_0^t e^{\lambda_i(s+2m+n)(t-t')} \phi_{mn-1}(s, t') dt' \end{aligned}$$

積分順序を変更すると

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1,2} H_i(s+2m+n) \\ &\times \int_0^\infty dt' \left\{ \int_{t'}^\infty dt e^{-\alpha t} e^{\lambda_i(s+2m+n)(t-t')} \right\} \phi_{mn-1}(s, t') \end{aligned}$$

$t-t' = \tau$ とおくと

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty d\tau e^{-\alpha\tau} \phi_{00}(s+2m+n, \tau) \\ &\times \int_0^\infty dt' e^{-\alpha t'} \phi_{m,n-1}(s, t') \\ &= \mathcal{L}_{00}(s+2m+n, \alpha) \mathcal{L}_{m,n-1}(s, \alpha) \\ &= \left(\prod_{k=1}^n \mathcal{L}_{00}(s+2m+k, \alpha) \right) \mathcal{L}_{m0}(s, \alpha). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{00}(s+2m+k, \alpha) \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \sum_{i=1,2} H_i(s+2m+k) e^{\lambda_i(s+2m+k)t} \\ &= \sum_{i=1,2} \frac{H_i(s+2m+k)}{\alpha - \lambda_i(s+2m+k)} \\ &= \frac{\alpha + \sigma_0}{[\alpha - \lambda_1(s+2m+k)][\alpha - \lambda_2(s+2m+k)]}. \end{aligned}$$

初期値は(3.2)から

$$\phi_{m0}(s, t) = H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} C_0^{(m)}(s).$$

よって,

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{m0}(s+2m, \alpha) \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} \phi_{m0}(s, t) dt = \frac{H_1(s) C_0^{(m)}(s)}{\alpha - \lambda_1(s)}. \end{aligned}$$

ラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned} \phi_{mn}(s, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{\alpha t} \mathcal{L}_{mn}(s, \alpha) d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{\alpha t} d\alpha \left\{ \prod_{k=1}^n \frac{\alpha + \sigma_0}{\alpha - \lambda_1(s+2m+k)} \right. \\ &\times \left. \frac{1}{\alpha - \lambda_2(s+2m+k)} \right\} \frac{H_1(s) C_0^{(m)}(s)}{\alpha - \lambda_1(s)}. \end{aligned}$$

$\lambda_1(s)$ を含むように積分路 c をとる。

被積分関数の最も主要な極は $\alpha = \lambda_1(s)$ である。

よって主要項近似のもとで,

$$\phi_{mn}(s, t) = H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} C_0^{(m)}(s) \rho_n(s+2m), \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} &\rho_n(s+2m) \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{[\lambda_1(s) - \lambda_1(s+2m+k)][\lambda_1(s) - \lambda_2(s+2m+k)]}. \end{aligned}$$

この右辺は

$$\prod_{k=2m+1}^{2m+n} \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{[\lambda_1(s) - \lambda_1(s+k)][\lambda_1(s) - \lambda_2(s+k)]}$$

と書き換えることができる。しかるに,

$$\prod_{k=2m+1}^{2m+n} = \prod_{k=1}^{2m+n} / \prod_{k=1}^{2m} \text{ と表すことができるから}$$

$$\rho_n(s+2m) = \frac{\rho_{2m+n}(s)}{\rho_{2m}(s)}. \tag{3.7}$$

$$\prod_{k=1}^{2m+n} = \prod_{k=n+1}^{2m+n} \times \prod_{k=1}^n \text{ と表されるから}$$

$$\rho_{2m+n}(s) = \rho_{2m}(s+n) \rho_n(s). \tag{3.8}$$

一方 $n \rightarrow \infty$ のとき $\prod_{k=1}^{2m+n}$ と $\prod_{k=1}^n$ は等価である。

よって(3.8)において $n \rightarrow \infty$ とするとき次式が成り立つ：

$$\rho_{2m+n}(s) = \rho_{2m}(s+n)\rho_n(s) = \rho_n(s), (n \rightarrow \infty) \tag{3.9}$$

これが第 I 稿 § 8.1.1 で用いた関係式である。

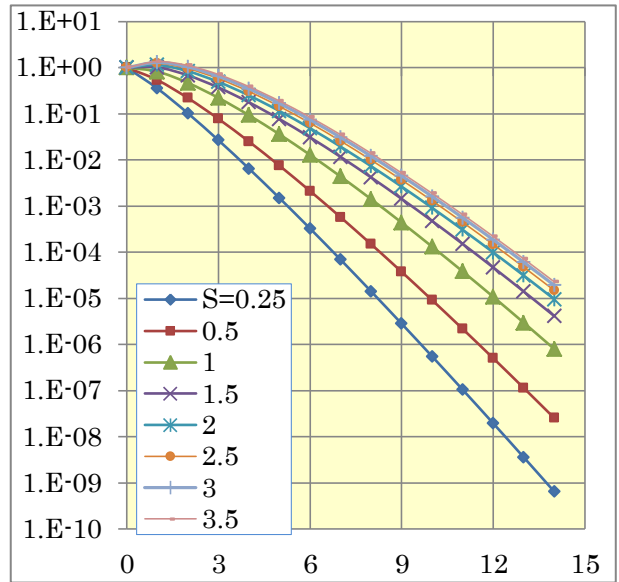
3.3. 数値とグラフ

$\rho_n(s)$ の数値とグラフを第 2 表、第 3 図に、

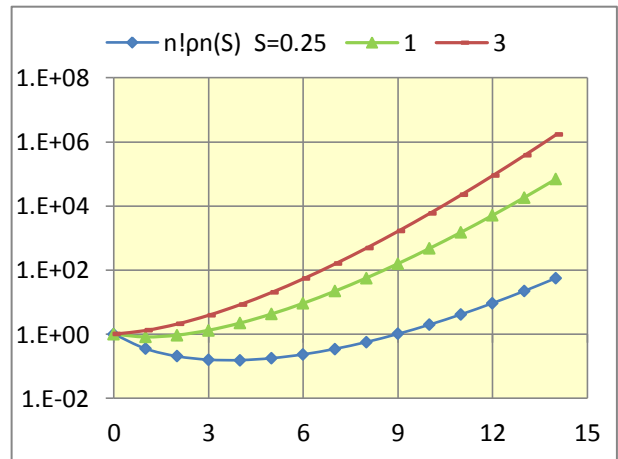
$n!\rho_n(s) (s=0.25, 1, 3)$ を第 4 図に示す。

n ↓ / S →	0.25	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0.352043	0.535542	0.817563	1.011395	1.138675	1.226093	1.293491	1.351426
2	0.101991	0.218294	0.465099	0.677623	0.832552	0.943612	1.031231	1.10853
3	0.026591	0.077236	0.220355	0.369505	0.488167	0.575895	0.645769	0.708107
4	0.006447	0.024852	0.092611	0.17636	0.248466	0.303194	0.346928	0.386053
5	0.001479	0.007449	0.03564	0.076394	0.114172	0.143562	0.167063	0.18804
6	0.000325	0.00211	0.0128	0.030683	0.048469	0.062645	0.073979	0.084044
7	6.87E-05	0.000571	0.004344	0.011588	0.019297	0.025593	0.030626	0.035066
8	1.41E-05	0.000148	0.001406	0.004156	0.007282	0.009897	0.011989	0.013821
9	2.8E-06	3.73E-05	0.000437	0.001426	0.002624	0.003652	0.004475	0.00519
10	5.46E-07	9.08E-06	0.000131	0.000471	0.000909	0.001294	0.001603	0.001869
11	1.04E-07	2.16E-06	3.8E-05	0.00015	0.000304	0.000442	0.000554	0.000649
12	1.94E-08	5E-07	1.07E-05	4.64E-05	9.83E-05	0.000146	0.000185	0.000218
13	3.56E-09	1.13E-07	2.94E-06	1.4E-05	3.09E-05	4.7E-05	6.01E-05	7.11E-05
14	6.41E-10	2.52E-08	7.9E-07	4.1E-06	9.48E-06	1.47E-05	1.9E-05	2.26E-05

第 2 表 $\rho_n(s)$



第 3 図 $\rho_n(s)$ vs. n



第 4 図 $n!\rho_n(s)$ vs. n の例

参考文献

- 1) J.Nishimura, Handbuch der Physik. **XLVI/2**(1967), p.104 の(A.4.57)と(A.4.58).
- 2) 新居誠彦, 足利大学研究集録 第 55 号(2020.3), 3 次元電磁カスケード理論, II.漸化式の新しい計算 — 逐次 2 階微分法 — § 2.3.

※) 足利大学名誉教授

原稿受付日 令和 3 年 1 月 1 日