3 次元電磁カスケード B 近似理論
エネルギー流ラテラル分布関数の計算
Ⅰ．電子数および電子エネルギー流
ラテラル分布関数の計算

新 居 誠 彦※

A Calculation of Energy-flow Lateral Distribution Function under Approximation B

in Three Dimensional Electron-Photon Cascade Theory.

Ⅰ．Calculation of Lateral Distribution Functions

for Electron Number and Electron Energy-flow.

NII Nobuhiko

Abstract

We calculate lateral distribution functions for the electron number and the electron energy-flow, under Approximation B in the three-dimensional cascade theory.

Keywords *: three-dimensional cascade theory, electron number lateral distribution function, energy-flow lateral distribution function, Approximation B, difference-differential equation.*

1.　はじめに

電子のエネルギー流ラテラル分布関数を計算する。本論文は 3 つの内容からなる。

(1) 電磁カスケード 3 次元理論における拡散方程式を解き電子数ラテラル分布関数と電子のエネルギー流ラテラル分布関数を計算する。二つは単位電子のエネルギー流ラテラル分布関数を求める際に必要となる。

(2) 解析接続法に基づく先達の結果を検証する。かつ解析接続法によって二つの分布関数を複素平面で計算する。

(3) 計算途中で現れる漸化式の新しい計算方法を示す。各々を第Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ稿に述べる。

2.　3次元拡散方程式

LANDAU-RUMER の提唱したカスケード理論3次元拡散方程式[1]を行列で表すと，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)\begin{pmatrix}\pi\\ \gamma\end{pmatrix}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}-A' & B'\\ C' & -\sigma_0\end{pmatrix}+\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial E}+\frac{E_s^{\,2}}{4E^2}\nabla_\theta^2\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\pi\\ \gamma\end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

$\pi\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)$，$\gamma\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)$は電子，光子の構造関数である。1 次エネルギー$Z_0$の入射粒子がカスケードを起こす（その深さが$t=0$．1次エネルギーは，電子入射の場合は$Z_0=E_0$，光子入射の場合は$Z_0=W_0$）。発生した電子，光子は次々と相互作用を重ね粒子数は世代とともに変化する。深さ$\left(t,t+dt\right)$において，変位が$\left(\vec{r},\vec{r}+d\vec{r}\right)$，散乱角が$\left(\vec{\theta},\vec{\theta}+d\vec{\theta}\right)$，エネルギーが$\left(E,E+dE\right)$の電子，光子の個数が$\pi\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)\times d\vec{r}d\vec{\theta}dEdt$, $\gamma\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)d\vec{r}d\vec{\theta}dEdt$である。

A',B',C',σ_0はカスケード演算子である。[2),3)]
$-A'\pi$，$B'\gamma$は輻射，対創生による電子数の変化を表し，$C'\pi$，$-\sigma_0\gamma$は輻射，対創生による光子数の変化, 吸収を表す（σ_0は対創生の全断面積）。εは電子の電離損失の臨界エネルギー（媒質が空気の場合 81MeV. 電離損失項$\varepsilon\partial/\partial E$を無視する理論をA近似理論と呼ぶ），$E_s$（＝21MeV)は散乱エネルギー，$\nabla_\theta^2=\partial^2/\partial\theta_1^{\,2}+\partial^2/\partial\theta_2^{\,2}$. 角分布関数$\left(\pi_1,\gamma_1\right)$, ラテラル分布関数$\left(\pi_2,\gamma_2\right)$はそれぞれ次式から得られる：

$$\begin{pmatrix}\pi_1\left(Z_0,E,\vec{\theta},t\right)\\ \gamma_1\left(Z_0,E,\vec{\theta},t\right)\end{pmatrix}=\iint\begin{pmatrix}\pi\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)\\ \gamma\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)\end{pmatrix}d\vec{r}, \quad (2.2)$$

$$\begin{pmatrix}\pi_2\left(Z_0,E,\vec{r},t\right)\\ \gamma_2\left(Z_0,E,\vec{r},t\right)\end{pmatrix}=\iint\begin{pmatrix}\pi\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)\\ \gamma\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)\end{pmatrix}d\vec{\theta}. \quad (2.3)$$

3. いくつかの変換

3.1. フーリエ変換

(2.1)の両辺に$\exp\left(i\vec{r}\cdot\vec{x}+i\vec{\theta}\cdot\vec{\varsigma}\right)$を乗じてフーリエ変換を施すと$\nabla_\theta^2$の演算が実行できる。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}\pi\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)\\ \gamma\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)\end{pmatrix}\mathrm{e}^{i\vec{r}\cdot\vec{x}+i\vec{\theta}\cdot\vec{\varsigma}}\,d\vec{r}d\vec{\theta}$$
$$=\begin{pmatrix}f\left(Z_0,E,\vec{x},\vec{\varsigma},t\right)\\ g\left(Z_0,E,\vec{x},\vec{\varsigma},t\right)\end{pmatrix} \quad (3.1)$$

と記す。拡散方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\vec{x}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{\varsigma}}\right)\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}-A' & B'\\ C' & -\sigma_0\end{pmatrix}\right.$$
$$\left.+\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial E}-\frac{E_s^{\,2}\varsigma^2}{4E^2}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

3.2. フーリエ逆変換とハンケル変換

$\left(\pi,\gamma\right)$は$\left(f,g\right)$のフーリエ逆変換から得る。

$$\begin{pmatrix}\pi\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)\\ \gamma\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\iint\begin{pmatrix}f\left(Z_0,E,\vec{x},\vec{\varsigma},t\right)\\ g\left(Z_0,E,\vec{x},\vec{\varsigma},t\right)\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-i\vec{r}\cdot\vec{x}-i\vec{\theta}\cdot\vec{\varsigma}}d\vec{x}\,d\vec{\varsigma}. \quad (3.3)$$

$$\begin{pmatrix}\pi_2\left(Z_0,E,\vec{r},t\right)\\ \gamma_2\left(Z_0,E,\vec{r},t\right)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int d\vec{\theta}\iint\begin{pmatrix} f\left(Z_0,E,\vec{x},\vec{\varsigma},t\right) \\ g\left(Z_0,E,\vec{x},\vec{\varsigma},t\right)\end{pmatrix}$$

$$\times \mathrm{e}^{-i\vec{r}\cdot\vec{x}-i\vec{\theta}\cdot\vec{\varsigma}}d\vec{x}\,d\vec{\varsigma}$$

$$=\int_0^\infty\begin{pmatrix} f\left(Z_0,E,x,0,t\right) \\ g\left(Z_0,E,x,0,t\right)\end{pmatrix}J_0\left(rx\right)2\pi x dx. \qquad (3.4)$$

ここで，$\iint_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\varsigma}}\,d\vec{\theta}=\left(2\pi\right)^2\delta\left(\vec{\varsigma}\right)$ および

$\mathrm{e}^{-i\vec{r}\cdot\vec{x}}d\vec{x}\ =\mathrm{e}^{-irx\cos\varphi}\,xdxd\varphi$,

$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-irx\cos\varphi}\,d\varphi=2\pi J_0\left(rx\right)$ を用いた。

$J_0\left(rx\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!^2}\left(-\frac{r^2x^2}{4}\right)^j$ は 0 次のベッセル関数。

$$\begin{pmatrix}\pi_1\left(Z_0,E,\theta,t\right) \\ \gamma_1\left(Z_0,E,\theta,t\right)\end{pmatrix}$$

$$=\int_0^\infty\begin{pmatrix} f\left(Z_0,E,0,\varsigma,t\right) \\ g\left(Z_0,E,0,\varsigma,t\right)\end{pmatrix}J_0\left(\theta\varsigma\right)2\pi\varsigma d\varsigma.$$

$\left(\pi_1,\gamma_1\right)$ の計算に必要な $\left(f,g\right)$ は(3.2)で $\vec{x}=0$ と

おけばよい。そのハンケル変換※) から $\left(\pi_1,\gamma_1\right)$ が

求められる。一方，$\left(\pi_2,\gamma_2\right)$ の計算に必要な

$\left(f,g\right)$ は(3.2)で $\vec{\varsigma}=0$ とおいて求めることがで

きない。$\vec{x}\cdot\partial/\partial\vec{\varsigma}$ という微分項があるためである。この項を消去する変換を次に考察する。

3.3. 方程式(3.2)の 1 次変換

(3.2)左辺の演算子 $\partial/\partial t-\vec{x}\cdot\partial/\partial\vec{\varsigma}$ を，$\vec{\varsigma}$ の微分を消去した形の演算子 $\partial/\partial t'$ に変換する 1 次変換を考える。先ず，互いに独立である $\vec{\varsigma}$ と $\vec{x}$ を平行にとる。

※) (3.4)の型の変換をハンケル変換と呼ぶ。

$\vec{x}=\left(x,0\right),\ \vec{\varsigma}=\left(\varsigma,0\right)$， $-\vec{x}\cdot\partial/\partial\vec{\varsigma}=-x\,\partial/\partial\varsigma$.

次に $\begin{pmatrix}t' \\ \varsigma'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}t \\ \varsigma\end{pmatrix}$， $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ とおく。

$\begin{pmatrix}\partial/\partial t \\ \partial/\partial\varsigma\end{pmatrix}={}^tA\begin{pmatrix}\partial/\partial t' \\ \partial/\partial\varsigma'\end{pmatrix}$.　よって，

$$\frac{\partial}{\partial t}-x\frac{\partial}{\partial\varsigma}=\left(a_{11}-xa_{12}\right)\frac{\partial}{\partial t'}+\left(a_{21}-xa_{22}\right)\frac{\partial}{\partial\varsigma'}.$$

$\partial/\partial t-x\,\partial/\partial\varsigma=\partial/\partial t'$， $t'=t$ を要請すると

$a_{11}=1,a_{12}=0,a_{21}=xa_{22}$. 任意の a_{22} $(\neq 0)$ は簡単のため 1 にとる（一般性は失われない)。

$\begin{pmatrix}t' \\ \varsigma'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t \\ \varsigma\end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix}t \\ \varsigma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ -x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t' \\ \varsigma'\end{pmatrix}$.

ゆえに $\varsigma=\varsigma'-xt'$.

ς と x とは同じ方向であるから ς' も同じ。したがってスカラー ξ を用いて $\varsigma'=\xi x$ とおくことが

できる。よって $\varsigma=\left(\xi-t'\right)x$.

t' を単に t と記すと方程式(3.2)は次式に変換される。

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}f \\ g\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}-A' & B' \\ C' & -\sigma_0\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.+\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial E}-\frac{{E_s}^2x^2}{4E^2}\left(\xi-t\right)^2\right)\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}f \\ g\end{pmatrix}. \qquad (3.5)$$

3.4. メリン変換

(3.5)をメリン変換 2),3) すれば $-A',B',C'$ の演算

が実行できる。E の関数 $f\left(E\right)$ のメリン変換は s

を複素数として次式で定義される：

$$\int_0^\infty E^s f\left(E\right)dE=\mathfrak{M}_f\left(s\right).$$

微分関数について，

$$\int_0^\infty E^s \frac{df(E)}{dE} dE = -s\mathfrak{M}_f(s-1).$$

メリン逆変換は,

$$f(E) = \frac{1}{2\pi i}\int_c E^{-s-1}\mathfrak{M}_f(s)ds.$$

ここで

$$\int_0^\infty E^s \begin{pmatrix} f(E,x,t) \\ g(E,x,t) \end{pmatrix} dE = \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s,x,t) \\ \mathfrak{M}_g(s,x,t) \end{pmatrix}$$

と記すと,

$$\int_0^\infty E^s \begin{pmatrix} -A' & B' \\ C' & -\sigma_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(E,x,t) \\ g(E,x,t) \end{pmatrix} dE$$

$$= \begin{pmatrix} -A(s) & B(s) \\ C(s) & -\sigma_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s,x,t) \\ \mathfrak{M}_g(s,x,t) \end{pmatrix}.$$

$-A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ はカスケード関数。[2),3)]

$$\int_0^\infty E^s \left(-\frac{{E_s}^2 x^2}{4E^2}(\xi-t)^2\right)\begin{pmatrix} f(E,x,t) \\ g(E,x,t) \end{pmatrix} dE$$

$$= -\frac{{E_s}^2 x^2}{4}(\xi-t)^2\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s-2,x,t) \\ \mathfrak{M}_g(s-2,x,t) \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s,x,t) \\ \mathfrak{M}_g(s,x,t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -A(s) & B(s) \\ C(s) & -\sigma_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s,x,t) \\ \mathfrak{M}_g(s,x,t) \end{pmatrix}$$

$$-s\varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s-1,x,t) \\ \mathfrak{M}_g(s-1,x,t) \end{pmatrix}$$

$$-\frac{{E_s}^2 x^2}{4}(\xi-t)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s-2,x,t) \\ \mathfrak{M}_g(s-2,x,t) \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

微分方程式(3.5)はメリン変換によって差分微分方程式(3.6)に変換される。

4. ずらし演算子

差分微分方程式(3.6)を扱うために差分演算子 Δ を定義する：

$$\Delta f(s) = f(s) - f(s-1). \quad (4.1)$$

$$(1-\Delta)f(s) = f(s-1),\ (1-\Delta)^n f(s) = f(s-n)$$

となるから $(1-\Delta)^n, (n=1,2,3,\cdots)$ を“ずらし演算子”とここでは呼ぶことにする。

これらを用いると(3.6)は,

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s,x,t) \\ \mathfrak{M}_g(s,x,t) \end{pmatrix}$$

$$=\left\{\begin{pmatrix} -A(s) & B(s) \\ C(s) & -\sigma_0 \end{pmatrix}\right.$$

$$+\left(-s\varepsilon(1-\Delta) - \frac{{E_s}^2 x^2}{4}(\xi-t)^2(1-\Delta)^2\right)$$

$$\left.\times\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s,x,t) \\ \mathfrak{M}_g(s,x,t) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

ここで次の略記を導入する：

$$\begin{pmatrix} -A(s) & B(s) \\ C(s) & -\sigma_0 \end{pmatrix} = P(s), \quad (4.3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_0, -s\varepsilon Q_0 = Q(s), \quad (4.4)$$

$$-\frac{{E_s}^2 x^2}{4}(\xi-t)^2 Q_0 = R(x,t), \quad (4.5)$$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f(s,x,t) \\ \mathfrak{M}_g(s,x,t) \end{pmatrix} = \mathfrak{M}(s,x,t). \quad (4.6)$$

(3.6)は次のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{M}(s,x,t)$$

$$= \left(P(s) + Q(s)(1-\Delta) + R(x,t)(1-\Delta)^2\right)$$

$$\times\mathfrak{M}(s,x,t). \quad (4.7)$$

$Q(s), R(x,t)$ は $P(s)$ と非可換である：

$$PQ \neq QP, PR \neq RP. \tag{4.8}$$

5. 鈴木-Trotter 公式の適用

非可換行列を含む微分方程式(4.7)の解は鈴木-Trotter 公式 [4] を用いて表される：

$$\mathfrak{M}(s,x,t) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_n(s,x,t), \tag{5.1}$$

$$\mathfrak{M}_n(s,x,t) = \prod_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{R(x,t_k)(1-\varDelta)^2 \varDelta t}\, \mathrm{e}^{Q(s)(1-\varDelta)\varDelta t}\, \mathrm{e}^{P(s)\varDelta t} \right) \cdot \mathfrak{M}_0(s). \tag{5.2}$$

$$t_k = k\varDelta t, \varDelta t = t/n. \tag{5.3}$$

初期条件を電子，光子の同時入射とする。

$$\mathfrak{M}_0(s) = \int_0^\infty E^s \begin{pmatrix} \delta(E-E_0) \\ \delta(E-W_0) \end{pmatrix} dE = \begin{pmatrix} E_0{}^s \\ W_0{}^s \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

(f,g) は次式から求められる。

$$\begin{pmatrix} f(Z_0,E,x,t) \\ g(Z_0,E,x,t) \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} f(Z_0,E,x,t) \\ g(Z_0,E,x,t) \end{pmatrix}_n, \tag{5.5}$$

$$\begin{pmatrix} f(Z_0,E,x,t) \\ g(Z_0,E,x,t) \end{pmatrix}_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{ds}{E^{s+1}} \times \prod_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{R(x,t_k)(1-\varDelta)^2 \varDelta t}\, \mathrm{e}^{Q(s)(1-\varDelta)\varDelta t}\, \mathrm{e}^{P(s)\varDelta t} \right) \begin{pmatrix} E_0{}^s \\ W_0{}^s \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

6. 3 次元 B 近似解の計算

3 次元 B 近似解は(5.5),(5.6)から得られる。

$$\begin{pmatrix} f(Z_0,E,x,t) \\ g(Z_0,E,x,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{8\pi^3 i} \int_c \frac{ds}{E^{s+1}} \times \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{R(x,t_k)(1-\varDelta)^2 \varDelta t}\, \mathrm{e}^{Q(s)(1-\varDelta)\varDelta t}\, \mathrm{e}^{P(s)\varDelta t} \right) \mathfrak{M}_0(s). \tag{6.1}$$ ※)

6.1. 指数行列の纏めと級数展開

(6.1)の $Q(s)$ と $R(x,t_k)$ とは可換である。

可換行列 A, B について $\mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B}$.

よって(6.1)の 2 つの指数行列は 1 つに纏められ，

$$\mathrm{e}^{R(x,t_k)(1-\varDelta)^2 \varDelta t}\, \mathrm{e}^{Q(s)(1-\varDelta)\varDelta t}\, \mathrm{e}^{P(s)\varDelta t} = \mathrm{e}^{\left\{R(x,t_k)(1-\varDelta)^2 + Q(s)(1-\varDelta)\right\}\varDelta t}\, \mathrm{e}^{P(s)\varDelta t}.$$

散乱項と電離損失項とは重ね合わされる。

6.2. メリン逆変換と s の原点移動

(6.1)を級数に展開してメリン逆変換を施す。

$$\begin{pmatrix} f(Z_0,E,x,t) \\ g(Z_0,E,x,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{8\pi^3 i} \int_c \frac{ds}{E^{s+1}} \Big\{ \mathrm{e}^{P(s)t}\, \mathfrak{M}_0(s) + \left(-\frac{E_s{}^2 x^2}{4} \right) \times \int_0^t \mathrm{e}^{P(s)(t-t')} (\xi - t')^2 Q_0\, dt'\, \mathrm{e}^{P(s-2)t'}\, \mathfrak{M}_0(s-2) + (-\varepsilon s) \int_0^t \mathrm{e}^{P(s)(t-t')} Q_0\, dt'\, \mathrm{e}^{P(s-1)t'}\, \mathfrak{M}_0(s-1) + \cdots \Big\}.$$

このとき s の原点を項別にずらすことができる [5]（補遺に捕足する）：

$$\begin{pmatrix} f(Z_0,E,x,t) \\ g(Z_0,E,x,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{8\pi^3 i} \int_c \frac{ds}{E^{s+1}} \Big\{ \mathrm{e}^{P(s)t} + \left(-\frac{E_s{}^2 x^2}{4E^2} \right) \int_0^t \mathrm{e}^{P(s+2)(t-t')} (\xi - t')^2 Q_0\, dt'\, \mathrm{e}^{P(s)t'} + \left(-\frac{\varepsilon}{E} \right)(s+1) \times \int_0^t \mathrm{e}^{P(s+1)(t-t')} Q_0\, dt'\, \mathrm{e}^{P(s)t'} + \cdots \Big\} \mathfrak{M}_0(s). \tag{6.2}$$

このことから次の定理が成立する：

『メリン逆変換と s の原点移動とを組みにすると，右側へ演算する演算子を左側へ演算する演算子に置き換えることができる』　すなわち，

$$\left.\begin{aligned} &(1-\varDelta) f(s) \to f(s)(1-\bar{\varDelta}), \\ &(1-\varDelta)^2 f(s) \to f(s)(1-\bar{\varDelta})^2. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

※) 以降では係数を $\left(8\pi^3 i\right)^{-1}$ とする。

$\overline{\varDelta}$ は左側へ演算する差分演算子を表す：

$$f(s)\overline{\varDelta} = f(s) - f(s+1). \tag{6.4}$$

このとき $\left(1-\overline{\varDelta}\right)^k$ は s を正の側へ（原点を負の側へ）ずらす演算子となる：

$$f(s)\left(1-\overline{\varDelta}\right)^k = f(s+k),\ (k=1,2). \tag{6.5}$$

(6.2)にこれらの演算子を用いると,

$$\begin{pmatrix} f(Z_0,E,x,t) \\ g(Z_0,E,x,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{8\pi^3 i}\int_c \frac{ds}{E^{s+1}}\{\mathrm{e}^{P(s)t}$$
$$+\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4}\right)\int_0^t \mathrm{e}^{P(s)(t-t')}(\xi-t')^2\left(1-\overline{\varDelta}\right)^2 Q_0\,dt'\,\mathrm{e}^{P(s)t'}$$
$$+(-\varepsilon s)\int_0^t \mathrm{e}^{P(s)(t-t')}\left(1-\overline{\varDelta}\right)Q_0\,dt'\,\mathrm{e}^{P(s)t'}+\cdots\}\mathfrak{M}_0(s). \tag{6.6}$$

上の規則を一般化すれば次式が成り立つ：

$$\begin{pmatrix} f(Z_0,E,x,t) \\ g(Z_0,E,x,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{8\pi^3 i}\int_c \frac{ds}{E}$$
$$\times\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\{\mathrm{e}^{\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}(\xi-t_k)^2\left(1-\overline{\varDelta}\right)^2-\frac{\varepsilon}{E}\left(1-\overline{\varDelta}\right)(s+1)\right)Q_0\varDelta t}\ \mathrm{e}^{P(s)\varDelta t}\}$$
$$\times\begin{pmatrix} (E_0/E)^s \\ (W_0/E)^s \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

6.3. 拡散方程式の解

散乱過程を m 回，電離損失を n 回経た世代を $\left(-E_s{}^2x^2/4E^2\right)^m(-\varepsilon/E)^n\,\varPhi_{mn}$ と表す。

これは $\left(-E_s{}^2x^2/4E^2\right)^{m-1}(-\varepsilon/E)^n\,\varPhi_{m-1\,n}$ から散乱を 1 回, $\left(-E_s{}^2x^2/4E^2\right)^m(-\varepsilon/E)^{n-1}\,\varPhi_{m\,n-1}$ から電離損失を 1 回それぞれ経た世代の重ね合わせで表されるから,

$$\varPhi_{mn}(s,\xi-t,t) = \int_0^t \mathrm{e}^{P(s+2m+n)(t-t')}dt'$$
$$\times Q_0\{(\xi-t')^2\varPhi_{m-1n}(s,\xi-t',t')$$
$$+(s+2m+n)\varPhi_{mn-1}(s,\xi-t',t')\}. \tag{6.8}$$

ただし $\varPhi_{00}(s,\xi-t,t) = \mathrm{e}^{P(s)t}$.

解 (f,g) は次のように表される：

$$\begin{pmatrix} f(Z_0,E,x,t) \\ g(Z_0,E,x,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{8\pi^3 i}\int_c \frac{ds}{E}$$
$$\times\{\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\right)^m\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n\phi_{mn}(s,t)\}$$
$$\times\begin{pmatrix} (E_0/E)^s \\ (W_0/E)^s \end{pmatrix}, \tag{6.9※)}$$

$$\phi_{mn}(s,t) = \lim_{(\xi-t)\to 0}\varPhi_{mn}(s,\xi-t,t).$$

一方 Nishimura は次の解を得ている。[3)]

$$f_2(E_0,E,x,t) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{ds}{E}$$
$$\times\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\right)^m\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n\phi_{mn}(s,t)\right\}, \tag{6.10※)}$$

$$\phi_{mn}(s,t) = \lim_{(\xi-t)\to 0}\varPhi_{mn}(s,\xi-t,t),$$

$$\varPhi_{00}(s,t) = H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t} + H_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t},$$

$$\varPhi_{mn}(s,\xi-t,t) = \int_0^t \varPhi_{00}(s+2m+n,t-t')$$
$$\times\{(\xi-t')^2\varPhi_{m-1n}(s,\xi-t',t')$$
$$+(s+2m+n)\varPhi_{mn-1}(s,\xi-t',t')\}dt'. \tag{6.11}$$

われわれの解(6.9)は Nishimura の解（6.10)（入射電子の創る電子成分，e $\to$ e）を含む。すなわ

※) (6.9)(6.10)で係数が 2π 異なるのはハンケル変換の定義（係数）の違いによる。

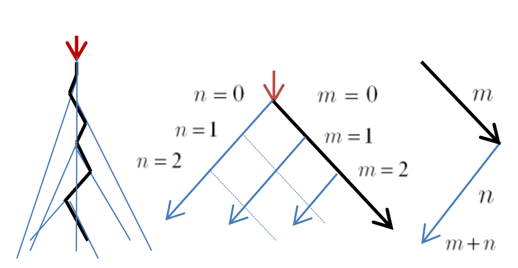
ち Nishimura の与えた解は鈴木-Trotter 公式を用いた解からも導かれることが示された。行列表示のわれわれの解は 4 過程（$e \to e, \gamma$ および $\gamma \to e, \gamma$）のすべてを記述するから一般的な表式である。

7.　樹形モデルの導入

3 次元 B 近似解の計算は漸化式(6.8)（行列表示）または(6.11)（スカラー表示）に基づいてすすめることができる。しかし散乱項と電離損失項とが重ね合わされた（並列した）表式であるため世代が下るほど扱うべき項数が幾何級数的に増え粒子の辿る経路は錯綜する。数式上の取り扱いが煩雑になるため漸化式がこのままの形では実用的とはいい難い。この困難を避けるためにカスケード過程を単純化した次のモデルを導入する。

7.1. 樹形モデル

入射粒子が親となってひき起こすカスケード過程を幹（3 次元 A 近似過程）とし，幹から派生するカスケード過程を枝（1 次元 B 近似過程）とする。ラテラル分布の中心軸を幹がつくり，周辺への拡がりを枝がつくるという樹形モデル(散乱過程に電離損失過程が直列したモデル)である(第 1 図)。ここで幹の第 m 世代から生じる枝の第 n 世代をとり上げる（第 1 図右)。



第 1 図 樹形モデル

この第$(m+n)$世代は(6.7)の乗積中の初めの m 世代において電離損失項を単位行列に置き換え，続く n 世代において散乱項を単位行列に置き換えることに対応する：

第$(m+n)$世代=

$$= \prod_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{-\frac{\varepsilon}{E}(1-\bar{\Delta})(s+1)Q_0 \Delta t} \, \mathrm{e}^{P(s)\Delta t} \right)$$

$$\times \prod_{k=1}^{m} \left(\mathrm{e}^{-\frac{{E_s}^2 x^2}{4E^2}(\xi - t_k)^2 (1-\bar{\Delta})^2 Q_0 \Delta t} \, \mathrm{e}^{P(s)\Delta t} \right) \begin{pmatrix} (E_0/E)^s \\ (W_0/E)^s \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

(7.1)の極限をとったあとメリン変換すれば

(f, g) が得られる。それのハンケル変換から

(π_2, γ_2) が得られる。

7.2 樹形モデルに基づく計算

7.2.1. 散乱過程の計算

(7.1)に基づく散乱過程の漸化式を求める。

散乱過程を m 回経た世代は(6.8)の $\boldsymbol{\Phi}_{mn-1}$ を捨てて且つ $n=0$ とした表式であるから，

$$\boldsymbol{\Phi}_{m0}(s, \xi - t, t)$$

$$= \int_0^t \mathrm{e}^{P(s+2m)(t-t')} (\xi - t')^2 \, dt' \, Q_0 \boldsymbol{\Phi}_{m-10}(s, \xi - t', t'),$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{00}(s, \xi - t, t) = \mathrm{e}^{P(s)t}, Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

m を順次減じていくと次式を得る。

$$\boldsymbol{\Phi}_{m0}(s, \xi - t, t)$$

$$= \int_0^t dt_m (\xi - t_m)^2 \cdots \int_0^{t_2} dt_1 (\xi - t_1)^2$$

$$\times \mathrm{e}^{P(s+2m)(t-t_m)} Q_0 \, \mathrm{e}^{P(s+2m-2)(t_m - t_{m-1})} Q_0$$

$$\times \cdots \mathrm{e}^{P(s+2)(t_2 - t_1)} Q_0 \, \mathrm{e}^{P(s)t_1}. \quad (7.2)$$

ところで $Q_0 = {Q_0}^2$ が成り立つから上の指数行列

$\mathrm{e}^{P(s+2k)(t_{k+1}-t_k)} = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$ を，初項と末項を除いて

両側からQ_0で挟むことができる($k=1,\cdots,m-1$).

$$Q_0\,\mathrm{e}^{P(s+2k)(t_{k+1}-t_k)}\,Q_0=\begin{pmatrix}a_k & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

$$a_k=\sum_{i=1,2}H_i\left(s+2k\right)\mathrm{e}^{\lambda_i(s+2k)(t_{k+1}-t_k)}. \tag{7.4}$$

よって,

$$\begin{aligned}&\Phi_{m0}\left(s,\xi-t,t\right)\\ &=\int_0^t dt_m\left(\xi-t_m\right)^2\cdots\int_0^{t_2}dt_1\left(\xi-t_1\right)^2\\ &\times\begin{pmatrix}a_m & 0\\ c_m & 0\end{pmatrix}a_{m-1}a_{m-2}\cdots a_1\begin{pmatrix}a_0 & b_0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{7.5}$$

これから次の定理が導かれる。

『(i) 初期と終期を除いた，散乱の中間過程は $\mathrm{e}^{P(s)t}$ の第(1,1)成分($\mathrm{e}\rightarrow\mathrm{e}$)のみを通して記述される。

(ii) 中間過程の記述は 4 過程全てに共通する』

7.2.2. $\boldsymbol{\Phi}_{m0}\left(s,\xi-t,t\right)$の漸化式

$\Phi_{m0}\left(s,\xi-t,t\right)$は$\left(\xi-t\right)$の多項式で表される：

$$\Phi_{m0}\left(s,\xi-t,t\right)=\mathrm{e}^{P(s)t}\sum_{k=0}^{2m}C_k^{(m)}\left(s\right)\left(\xi-t\right)^k.$$

係数$C_k^{(m)}\left(s\right)$は次の漸化式から得られる。

$$\begin{aligned}&C_k^{(m)}\left(s\right)=\sum_{i=1,2}H_i\left(s+2m\right)\times\\ &\times\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{2m-k}\frac{\left(j+k\right)!}{\left(\lambda_1\left(s\right)-\lambda_i\left(s+2m\right)\right)^{j+1}}C_{j+k-2}^{(m-1)}\left(s\right),\end{aligned} \tag{7.6}$$

$$\left(C_{-2}^{(m-1)}\left(s\right)=C_{-1}^{(m-1)}\left(s\right)=0,\ C_0^{(0)}\left(s\right)=1\right).$$

漸化式の導出と計算は第Ⅲ稿§1 に示す。

7.2.3　電離失過程の計算

散乱過程をm回経たあと電離損失過程をn回経る世代を$\phi_{mn}\left(s,t\right)$と表す。これは(6.8)で$\Phi_{m-1n}$を除いた表式に対応する。

$$\phi_{mn}\left(s,t\right)=\int_0^t\mathrm{e}^{P(s+2m+n)(t-t')}\,dt'Q_0\phi_{m\,n-1}\left(s,t'\right), \tag{7.7}$$

初期値$\phi_{m0}\left(s,t\right)$は枝と幹との接点である：

$$\begin{aligned}\phi_{m0}\left(s,t\right)&=\lim_{(\xi-t)\to0}\Phi_{m0}\left(s,\xi-t,t\right)\\ &=C_0^{(m)}\left(s\right)\,\mathrm{e}^{P(s)t}.\end{aligned} \tag{7.8}$$

$\phi_{mn}\left(s,t\right)$は次の形(スカラー)で表される（第Ⅲ稿§2)。

$$\phi_{mn}\left(s,t\right)=H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}C_0^{(m)}\left(s\right)\rho_n\left(s+2m\right). \tag{7.9}$$

8. 解$\boldsymbol{f\left(E_0,E,x,t\right)}$の計算,

ここ以降，入射電子の創る電子成分(e→e)を対象にする（$f\left(E_0,E,x,t\right)$はスカラーである)。

$$\begin{aligned}&f\left(E_0,E,x,t\right)=\frac{1}{8\pi^3 i}\int_c\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{ds}{E}H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\\ &\times\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\right)^m C_0^{(m)}\left(s\right)\frac{\left(s+2m+n\right)!}{\left(s+2m\right)!}\\ &\times\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n\rho_n\left(s+2m\right).\end{aligned} \tag{8.1}$$

8.1. $\boldsymbol{n}$の和の計算

8.1.1. $\boldsymbol{\rho_n\left(s+2m\right)}$の, $\boldsymbol{m,n}$の分離

(8.1)のnの和S_1は 2 項係数を用いて,

$$S_1=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s+2m+n}{n}\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n n!\rho_n\left(s+2m\right).$$

$n!\rho_n\left(s+2m\right)$が$m$と$n$とに分離できれば和が求

められる。第Ⅲ稿§2.2に示すように

(i) $\rho_n(s+2m)=\rho_{2m}(s+n)\rho_n(s)/\rho_{2m}(s)$,
(ii) $\rho_{2m}(s+n)\rho_n(s)=\rho_n(s), n\to\infty$,

(iii) $n!\rho_n(s)$ は $n\to$ 大で重要になる。

これらの理由から $n!\rho_n(s+2m)$ に，m と n が分

離した項，$n!\rho_n(s)/\rho_{2m}(s)$，を代用する：

$$S_1=\frac{1}{\rho_{2m}(s)}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s+2m+n}{n}\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n n!\rho_n(s). \quad (8.2)$$

8.1. 2. Prony 内挿法の適用

(8.2)の $n!\rho_n(s)$ に Prony 内挿法[6]を適用して，

$$n!\rho_n(s)=\sum_{j=1}^{N}D_j(s)\beta_j(s)^n \quad (8.3)$$

と表す。$2N$ 個の係数 $D_j(s), \beta_j(s), (j=1,\cdots,N)$

は $2N$ 個の既知数 $n!\rho_n(s), (n=0,1,\cdots,2N-1)$

から一意的に定まる。

$$S_1=\sum_{j=1}^{N}D_j(s)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s+2m+n}{n}\left(-\frac{\varepsilon\beta_j(s)}{E}\right)^n, \quad (8.4)$$

ここで E を，和の存在条件 $\varepsilon\beta_j(s)/E<1$ が満

たされるように十分大きな値にとると，

$$S_1=\sum_{j=1}^{N}\frac{D_j(s)}{\left(1+\varepsilon\beta_j(s)/E\right)^{s+2m+1}}. \quad (8.5)$$

(8.5)の分母は(8.1)にあるエネルギー項 $E^{-s-1-2m}$

と結びついて $\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^{-s-2m-1}$ となる。

$$f(E_0,E,x,t)=\frac{1}{8\pi^3 i}\int_c E_0{}^s ds H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4}\right)^m\frac{C_0^{(m)}(s)}{\rho_{2m}(s)}\sum_{j=1}^{N}\frac{D_j(s)}{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^{s+2m+1}}.$$
(8.6)

よって $\varepsilon\beta_j(s)/E<1$ なる条件は解除され，

ここから以降 $E\to 0$ が可能となる。

8.2. m の和の計算― Dirichilet 級数の適用 ―

m の和を S_2 と記す。

$$S_2=\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2}\right)^m\frac{C_0^{(m)}(s)}{\rho_{2m}(s)} \quad (8.7)$$

は Dirichlet 級数[7] を用いて表すことができる：

$$S_2=\sum_{i=1}^{M}C_i(s)\mathrm{e}^{-\alpha_i(s)E_s{}^2x^2/4\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2}. \quad (8.8)$$

指数関数を展開して(8.7)のベキと比較すると，

$$\sum_{i=1}^{N}C_i(s)\alpha_i(s)^m=m!C_0^{(m)}(s)/\rho_{2m}(s).$$

(8.3)と同じ構造をもつ。すなわち Dirichlet 級数を用いる方法と Prony 内挿法とは等価である。

よって $2M$ 個の係数 $C_i(s), \alpha_i(s)$ は $2M$ 個の既知

数 $m!C_0^{(m)}(s)/\rho_{2m}(s)$ から一意的に定まる。

$$f(E_0,E,x,t)=\frac{1}{8\pi^3 i}\int_c E_0{}^s ds H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{C_i(s)D_j(s)}{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^{s+1}}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha_i(s)E_s{}^2x^2}{4\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2}}. \quad (8.9)$$

この式は x についてガウス型である。よって実数の範囲でハンケル変換が実行できる。

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} J_0(rx)\,x\,dx = \frac{1}{2a} e^{-r^2/4a}. \qquad (8.10)$$

9. ラテラル分布関数

9.1. 電子数の微分・積分ラテラル分布関数

電子数ラテラル分布関数の微分型，積分型は，

$$\pi_2(E_0,E,r,t) = \int_0^\infty f(E_0,E,x,t) J_0(rx) 2\pi x dx$$
$$= \frac{1}{4\pi^2 i}\int_c E_0^{\,s} ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \frac{2}{E_s^{\,2}}$$
$$\times \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)} \frac{D_j(s)}{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^{s-1}} e^{-\frac{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2 r^2}{E_s^{\,2}\alpha_i(s)}} . \qquad (9.1)$$

および

$$\Pi_2(E_0,E,r,t) = \int_E^{E_0} \pi_2(E_0,E,r,t) dE$$
$$= \frac{1}{4\pi^2 i}\int_c \left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^s \frac{ds}{r^2} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times \sum_{i=1}^M \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}} \sum_{j=1}^N D_j(s)$$
$$\times\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1, \frac{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2 r^2}{E_s^{\,2}\alpha_i(s)}\right)$$
$$-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1, \frac{\left(E_0+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2 r^2}{E_s^{\,2}\alpha_i(s)}\right)\}. \qquad (9.2)$$

$\Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ は第 2 種不完全ガンマ関数。[8)]

9.1.1.　コアでの形状

$\Pi_2(E_0,E,r,t)$ のコア $(r\to 0)$ における形状は次のように見積ることができる。まず(9.2)の{　}内を $A(r)$ と記すと，

$$\Pi_2(r) \sim r^{s-2} A(r).$$

次に，不完全ガンマ関数の r^2 の係数を

$$\frac{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2}{E_s^{\,2}\alpha_i(s)} = a, \frac{\left(E_0+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2}{E_s^{\,2}\alpha_i(s)} = a_0 \text{ とし，}$$

$A(r)$ を第 1 種不完全ガンマ関数※) で表す。

$$r\to 0 \Rightarrow A(r) \sim r^{-s+2} \frac{a_0^{\,-s/2+1} - a^{-s/2+1}}{-s/2+1}.$$
$$\Pi_2(0) \sim \left(a_0^{\,-s/2+1} - a^{-s/2+1}\right)\big/\left(-s/2+1\right),$$
$$s = 2 \Rightarrow \Pi_2(0) \sim \ln(a_0/a).$$

コアは有界である。(9.2){　}内第 2 項の存在が非発散を保証する。一方，$E_0 = \infty$ とする Nishimura は $\Pi_2(r) \sim 1/r^{2-\bar{s}}$（$\bar{s} < 2$）; const.（$\bar{s} > 2$）を示す。[3)] $\bar{s}$ の，r への依存の仕方によっては $r\to 0$ で発散も非発散もあり得る（しかし r への依存性は示されていない）。$E_0 =$ 有限，とする著者の定式化にそのような曖昧さはない。s の値に依らず発散は生じない。

9.1.2.　A 近似，B 近似の表式

(9.2)で，$\varepsilon = 0$ とおいて恒等式 $\sum_j D_j(s) = 1$ を用いれば A 近似ラテラル分布関数が得られ，$E\to 0$ とすれば閾値ゼロの B 近似ラテラル分布関数が得られる。

9.1.3.　体積積分

(9.2)の体積は 1 次元遷移曲線を与えなければならない。それを確認する。

※) $\gamma(a,x) = \Gamma(a) - \Gamma(a,x)$

$$= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{n+a} \big/ n!(n+a) \to x^a/a, (x\to 0).$$

$\int_0^\infty \Pi_2(E_0,E,r,t)2\pi r dr = V(E_0,E,t)$ と記す。

$\int_0^\infty x^\alpha \Gamma(\beta,x)dx = \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha+1}$ [8] を用いると，

$$V(E_0,E,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c E_0{}^s \frac{ds}{s} H_1(s) \mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times \sum_{j=1}^{N} D_j(s) \left\{ \frac{1}{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^s} - \frac{1}{\left(E_0+\varepsilon\beta_j(s)\right)^s} \right\}.$$

ただし恒等式 $\sum_{i=1}^{M} C_i(s) = 1$ を用いた。

(1)　$E \to 0$ とし $\varepsilon \ll E_0$ を考慮すれば

$$V(E_0,0,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s \frac{ds}{s} H_1(s) \mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times \sum_{j=1}^{M} D_j(s)\beta_j(s)^{-s}.$$

$\sum_{j=1}^{M} D_j(s)\beta_j(s)^{-s} = K_1(s,-s)$（Rossi-Greisen の K 関数）である。[9] よって体積積分は閾値ゼロの B 近似遷移曲線 [2),3)] を含むことが確認される。

(2)　$\varepsilon = 0$ とおき $E \ll E_0$ を考慮すれば,

$$V(E_0,E,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{ds}{s} H_1(s) \mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}.$$

よって体積積分は A 近似遷移曲線 [2),3)] を含むことが確認される (恒等式 $\sum_{j=1}^{N} D_j(s) = 1$ を用いた)。

9.2. 電子のエネルギー流ラテラル分布関数

エネルギー流ラテラル分布関数は,

$$\Pi_E(E_0,E,r,t) = \int_E^{E_0} E\,\pi_2(E_0,E,r,t)dE$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 i}\int_c \left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^s ds\, H_1(s) \mathrm{e}^{\lambda_1(s)t} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}} D_j(s) A_{ij}(E,r,s), \qquad (9.3)$$

$$A_{ij}(E,r,s)$$

$$= -\frac{\varepsilon\beta_j(s)}{r^2}\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1, \frac{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2 r^2}{E_s{}^2\alpha_i(s)}\right)$$

$$-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1, \frac{\left(E_0+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2 r^2}{E_s{}^2\alpha_i(s)}\right)\}$$

$$+\frac{E_s}{r^3}\alpha_i(s)^{1/2}\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2}, \frac{\left(E+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2 r^2}{E_s{}^2\alpha_i(s)}\right)$$

$$-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2}, \frac{\left(E_0+\varepsilon\beta_j(s)\right)^2 r^2}{E_s{}^2\alpha_i(s)}\right)\}. \qquad (9.4)$$

(9.4){　}内の E_0 を含む項は $r \to \infty$ で無視できる。しかし，前節で示したのと同じ手法で確認できるように，これらの項の存在はコア中心 ($r \to 0$) で関数が発散しないことを保証する。

ここで得た 2 種類のラテラル分布関数は単位電子の平均エネルギーのラテラル分布関数：

$$e_E(E_0,E,r,t) = \frac{\Pi_E(E_0,E,r,t)}{\Pi_2(E_0,E,r,t)} \qquad (9.5)$$

を求める場合に必要である。別途報告する。

9.3. A，B 近似エネルギー流ラテラル分布関数

エネルギー流の A 近似ラテラル分布関数 [10)] は (9.4) において $\varepsilon = 0$ とおき且つ (9.3) において恒等式 $\sum_j D_j(s) = 1$ を用いれば得られる。

(9.4) において $E \to 0$ とすれば閾値ゼロの B 近似エネルギ流ラテラル分布関数が得られる。

参考文献

1)　L.D.Landau and G.Rumer,*Collected Papers of DLANDAU*,ed. R ter Haar (Pergamon Press,Headington Hill Oxford,London.1965),252.

2) B.Rossi and K.Greisen,Rev.Mod.Phys. **13**(1941),240.

3) J.Nishimura, Handbuch der Physik. **XLVI/2**(1967).1.

4) M.Suzuki,Commun.Math.Phys.51.(1976),183. H.F.Trotter, Proc.Amer.Math.Soc.10(1959),545.

5) H.J.Bhabha,F.R.S. and S.K.Chakrabarty, Proc.London(Ser.A,Math.And Phys.)181(1943)267.

6) 日高孝次，数値積分法（第四章）（岩波書店，1942），67.

7) 数学公式**Ⅱ**，森口繁一，宇田川銈久，一松信(岩波全書，1965)，64.

8) 数学公式**Ⅲ**，森口繁一，宇田川銈久，一松信(岩波全書，1994)，14.

9) 新居誠彦，足利工業大学研究集録第 **51** 号 (2017.3),84.

10) 新居誠彦，足利工業大学研究集録第 **55** 号 (2020.3),50.

補 遺

s の原点をずらすことのできる理由

$f(E)$ のメリン変換 $\mathfrak{M}_f(s)=\int_0^\infty E^s f(E)\,dE$ の逆変換を A と表す。

$$A=\frac{1}{2\pi i}\int_c E^{-s-1}\mathfrak{M}_f(s)\,ds$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c E^{-s-1}\left(\int_0^\infty E'^s f(E')\,dE'\right)ds$$
$$=\frac{1}{E}\int_0^\infty dE' f(E')\frac{1}{2\pi i}\int_c\left(\frac{E'}{E}\right)^s ds.$$

$(E'/E)^s=\mathrm{e}^{s\ln(E'/E)}$　と表し，積分路 c 上で $s=s_0+i\sigma$ とする。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\left(\frac{E'}{E}\right)^s ds=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{E'}{E}\right)^{s_0}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{i\sigma\ln(E'/E)}\,d\sigma,$$
$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{i\sigma\ln(E'/E)}\,d\sigma=2\pi\delta(\ln E'-\ln E).$$

デルタ関数の変数が関数 $g(x)$ であるとき

$$g(a)=0\Rightarrow g(x)=g'(a)(x-a)+\cdots$$
$$\delta(g(x))=\delta(g'(a)(x-a))=\frac{\delta(x-a)}{|g'(a)|}.$$
$$\therefore\ \delta(\ln E'-\ln E)=E'\delta(E'-E).$$
$$A=\frac{1}{E}\int_0^\infty\left(\frac{E'}{E}\right)^{s_0} f(E')E'\delta(E'-E)\,dE'=f(E).$$

積分結果は s の実部 s_0 に依らない。よって初めから s の原点を適切にずらしてメリン逆変換を実行することができる。

※）足利大学名誉教授

原稿受付日　令和 3 年 1 月 1 日
