

日本の第 1 波 COVID-19 感染症への SIQR モデルの適用

櫻井高夫

名誉教授

Application of SIQR Model to the first Wave COVID-19 Infection in Japan

Takao SAKURAI

Abstract

A method to apply the SIQR model to the daily number of new positives of infectious diseases was developed and applied to the COVID-19 infectious disease data in Japan. The best fit values of all parameters defined in the ISQR model can be determined by this numerical method. The number of daily positives in the first wave, which peaked in April, did not decay rapidly and remained flat until June. This flat state is generated by the presence of unquarantined community-infected persons. This is because their recovery rate and isolation rate are very low.

Keywords: COVID-19, SIR Model, SIQR Model, Numerical Analysis, Levenberg-Marquardt

Method

1. 初めに

中国における新型コロナ COVID-19 の感染者数が 8 万人を超えた 20 年 3 月中旬, 伝染病感染の拡散を記述する SIR モデル⁽¹⁾の存在を知った。そのモデルは, 感染する可能性のある人口 S , 感染して感染性を有する人口 I , 感染後に回復して免疫を獲得した(死者も含む)人口 R の間に成り立つ連立微分方程式である。その式を目にしたとき, 現役時代に熱ルミネセンスグロウ曲線の解析⁽²⁾のために作成したアルゴリズムの一部を利用し修正すれば簡単に扱うことができることに気が付いた。この数理解析に対する純粋な興味から当時の感染状況に SIR モデルを適用することを思い付き, その後に SIQR モデル⁽³⁾に出会った。20 年 2 月後半から 6 月中旬までの日本の第 1 波新規感染者分布グラフを例として, 感染症データへの SIQR モデルの適用法の開発とその適用結果を報告する。

2. SIR モデル

ある閉鎖集団を考えると, SIR モデルは t 日後の $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ の間に

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \quad (1)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad (2)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \quad (3)$$

なる関係があるとするモデルである。ここで β は感染率, γ は回復率を表す。

現代社会では確認された新規感染者は全員が病院や自宅, ホテル等に隔離される政策が実行されている。したがって, この新規感染者は(1)式に示される様な, 周辺に新たな感染者を引き起こす原因としての $I(t)$ にはなり得ないのである。もちろん院内感染等の可能性は実際に存在しているが, その数は感染者全体に比較すれば無視できる数字

であろう。このことに気が付いた小田垣氏は感染者の中に隔離された感染者 $Q(t)$ と、未検出のまま市中に留まっている市中感染者 $I(t)$ が存在するという SIQR モデルを提案した⁽³⁾。

3. SIQR モデル

未感染者 $S(t)$ と回復者 $R(t)$ は SIR モデルと同様に定義される。したがって、それぞれの人口の時間的な変化は (1) 式に加えて

$$\frac{dI(t)}{dt} = (1-q)\beta S(t)I(t) - pI(t) - \gamma_1 I(t) \quad (4)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = q\beta S(t)I(t) + pI(t) - \gamma_Q Q(t) \quad (5)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma_1 I(t) + \gamma_Q Q(t) \quad (6)$$

と表すことができる。ここで、係数 q は未感染者 S が市中感染者 I との接触で感染した者のうち陽性が確認され隔離された人の割合で、本報告では陽性率と呼ぶことにする。係数 p は市中感染者の中で、検査で感染が確認され隔離された人の割合であり、隔離率と呼ぶことにする。日々報告される新規感染者は、陽性が確認され隔離された感染者 $Q(t)$ に含まれることになるので、今後、 $Q(t)$ を隔離感染者と呼び、市中感染者 $I(t)$ と区別することにする。また、(6) 式の γ_1 と γ_Q はそれぞれ市中感染者と隔離感染者の回復率を表している。これらの (1)、(4)～(6) 式から

$$Q(t) = N - S(t) - I(t) - R(t) \quad (7)$$

が導かれる。ここで N は未感染者、隔離感染者と市中感染者が含まれる閉鎖集団の総人口を表すが、ここでは図 1 に示される感染に関わる集団の人口と考える。(7) 式を使うと、(6) 式は

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma_1 I(t) + \gamma_Q \{N - S(t) - R(t) - I(t)\} \quad (8)$$

となる。

そこで、(1)、(4)、(8) 式の連立微分方程式を数値解析し、その結果を (7) 式に代入すれば、全ての変数 $S(t)$ 、 $I(t)$ 、 $Q(t)$ 、 $R(t)$ を得ることができる。ゆえに、これらの変数と比較できる適当な感染者情報があれば SIQR モデルに関連するパラメータ β 、 γ_1 、 γ_Q 、 q 、 p と N を決定することができる。本

報告では (1)、(4)、(8) 式の連立微分方程式は Runge-Kutta-Gill 法⁽⁴⁾を使用して数値解析された。

4. SIQR モデルと新規陽性者数との比較

4.1 比較の方法

日毎に報告される新規陽性者数と退院数(死亡者数を含む)から得られる、日時 t までの累積陽性者数から累積退院数を減じた値は隔離感染者 $Q(t)$ に対応していると考えられる。しかし、退院数の報告は調査機関の集計方法等が統一されていない可能性があり、経時変化が正しく報告されていないと考えられる。実際、朝日新聞デジタル版に報じられた数値からは、6 月中旬に $Q < 0$ が発生している。そこで、日々報告される新規陽性者数のみを対象資料として採用することにした。2 月中旬から 6 月中旬までの日毎の新規陽性者数を朝日新聞デジタル版より読み取って図 1 に示した。

日々の新規陽性者数 $P(t)$ は次式で表される。

$$P(t) = q\beta S(t)I(t) + pI(t) \quad (9)$$

そこで β 、 γ_1 、 γ_Q 、 q 、 p と N に適当な試行値を与えて数値解析された解 $S(t)$ と $I(t)$ を使って改めて (9) 式を計算すれば日々報告される新規陽性者数に対応する $P(t)$ を得ることができる。この $P(t)$ の計算値と図 1 の報告値を比較し両者の偏差の 2 乗和から

$$\delta^2 = \frac{w \sum \{P(t)_{\text{報告}} - P(t)_{\text{計算}}\}^2}{n(n-1)} \quad (10)$$

を求めた。ここで w は重み、 n は比較する日数である。このようにして計算された δ^2 値を最小にする様に β 、 γ_1 、 γ_Q 、 q 、 p と N を可変して計算を繰り返し実行すればよい。そのための方法として非線形関数の最小 2 乗法のアルゴリズムである

Levenberg-Marquart 法⁽⁵⁾を利用した。

2 月に始まる感染は 3 月に入ってから小さなピークを形成し、3 月中旬に減少した後に本格的な増加が始まった。その後 4 月中旬に第 1 波のピークを示してから減少するが、速やかに終息することなく数十人の感染者数で横ばい状態が続く、6 月の後半から再度増加傾向が見られるようになり第 2 波のピークに繋がっている。このような

新規感染者数の推移はフランス、ドイツ、イタリア、スペイン等の推移グラフと類似しており、今回の COVID-19 感染症の特徴と考えられる。

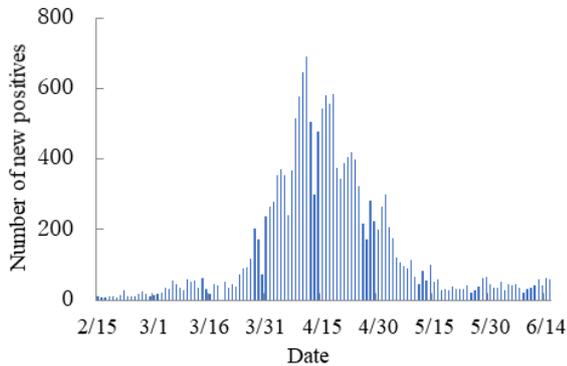


Fig. 1 Daily number of new positives.

4. 2 感染スタート日の推定

感染の初期においては、感染者数は指数関数的に増加することは知られており、SIQR モデルにおいても容易に示すことができる⁽³⁾。そこで、図 1 に示される日毎の新規陽性者数の対数を図 2 に示した。図 2 の横軸は 2/15 からの日数を示している。この図は、3/13 以前とそれ以降の感染者数は異なる指数関数で表されることを示している。これは、図 1 に示される感染のスタート日として 2/15 を選択することは不適であることを意味している。実際、4 月のピークに繋がる指数関数を表す直線を外挿すると、その外挿値は 2/15 時点での新規陽性者数は 1 人に満たないことを示している。そこで本報告では、その外挿値が 5 人を示す 3/1 を第 1 波の感染ピークのスタート日とすることにした。ただし、図 2 において、ピンク色で示される数値は (10) 式を使う比較の範囲から外した。すなわち、3/16 から 6/19 までの陽性者数データを (9) 式を使った計算結果と比較した。

4. 3 計算方法

始めに重み $w=1$ とする。これは、図 1 に示される新規陽性者数分布の形と、(9) 式により計算された $P(t)$ 曲線の形の一致度のみを表す δ^2 値を指標として使う解析法を意味している。この場合、(9) 式で定義される $P(t)$ 曲線は γ_0 に依存しないので、この解析法では γ_0 を決定できないことに注意

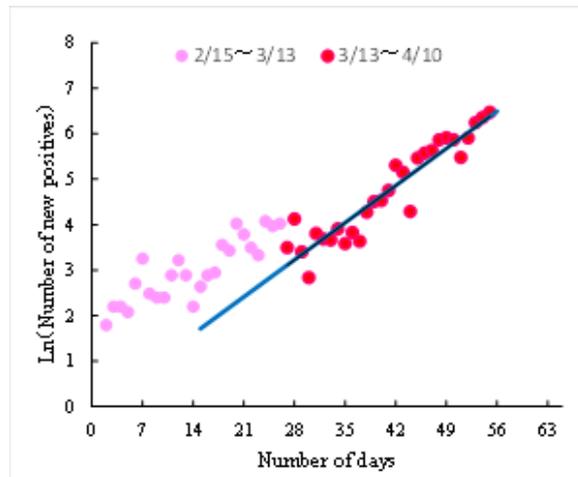


Fig. 2 Estimation of the start of the infection disease shown in Fig. 1.

すべきである。

数値解析された $P(t)$ 曲線は試行値として与えられる N と β に大きく依存するが、 γ_1 , γ_0 , q , p の試行値に対する依存度は小さい。そこで計算スタート時における試行値として γ_1 , γ_0 , q , p はそれぞれ 0.2, 0.1, 0.3, 0.1 に固定した。始めに N , β に任意の値を与えれば、それ以降の N , β , γ_1 , γ_0 , q , p の値はアルゴリズムに従って少しずつ変更され、その都度計算が実行される。一般に、 β の値が小さいときには $P(t)$ は直線的に変化するが、 β の値が大きくなると分布図と類似の曲線が現れる領域が存在し、その周辺で δ^2 値の収束解が得られる。解析の手順は以下のとおりである。

- ① N の試行値を任意に与える。
- ② β の試行値を任意に与えて計算を実行させる。
- ③ δ^2 値の収束解が出現したらその値を最小値とする。
- ④ β の試行値を変更して再度計算を実行し δ^2 値の収束解を得る。
- ⑤ 得られた収束解を最小値と比較して、小さければ最小値を新しい収束解で置き換えて④に戻る。大きくなったら①に戻る。

このようにして、最小の δ^2 値の試行値 N に対する依存性が得られる。人口 N の試行値を 30 万人から 1 万人ずつ小さくして計算した場合の依存性は図 3 の青点で示される。この青点グラフにおいて最小の δ^2 を与える N の値から、図 1 に示される感染

症の陽性者数推移グラフを説明する最適解を得ることができる。

4. 4. 1 重みなし ($w=1$) 解析の結果

図 3 の青点グラフが示す δ^2 値は一様な変化ではないが、 $N=8$ 万人までは N の減少と共に減少する傾向を示す。しかし、 $N=7$ 万人で突然最小値が出現し、それ以下でも同じ δ^2 値が表れた。この結果から、試行値として $N=2$ 万～7 万人の間を選べば最適解が得られることが予想されるが、それ以上の詳しい議論は重みなしの解析ではできない。ここで重要なことは、試行値 N の値として 7 万人以下とそれより大きい人口を与えたときでは質的に異なる解が得られるという事実である。図 4 に、 $N=7$ 万と 8 万人を試行値として与えた場合の最適解の $P(t)$ 曲線を図 1 に示される陽性者分布と比較して示した。試行値 $N=8$ 万人に対して得られた最適解は、図 4 の青色曲線で示されるように、5 月後半から速やかに終息する $P(t)$

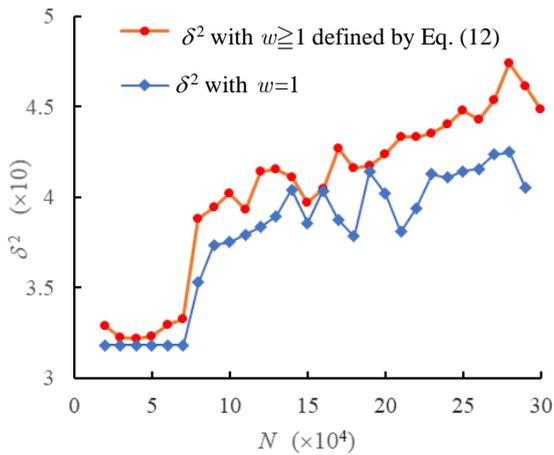


Fig. 3 Dependence of δ^2 on the trial values of N .

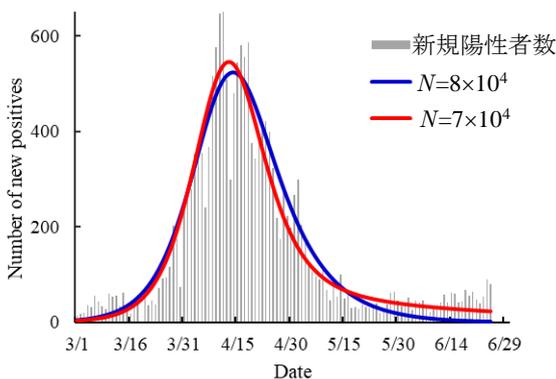


Fig. 4 Comparison of the best fit $P(t)$ curves between $N=8 \times 10^4$ and 7×10^4 .

曲線を与えた。 $N > 8$ 万人でも同様である。一方、 $N=7$ 万人及びそれ以下の場合の最適解は図 4 の赤色曲線で示される。図 1 に示される新規陽性者数推移分布の特徴である 5 月後半以降の横ばい状態に対応する緩い減衰状態を赤色曲線は再現している。そこで、この赤色曲線に対応する γ_Q 値を決定する計算が以下のように実行された。

4. 4. 2. 重みの定義

この緩い減衰状態を解析結果に反映させるために累積陽性者数を重み w の定義に導入する。(9) 式を (5) 式に代入して、その両辺を積分すると

$$Q(t) = \int_0^t P(t) dt - \gamma_Q \int_0^t Q(t) dt \quad (11)$$

が得られる。感染が終息した時を t_∞ とすると、 $Q(t_\infty) = 0$ である。これより重み w を以下のように定義する。

$$w = \frac{\int_0^{t_\infty} P(t) dt}{\gamma_Q \int_0^{t_\infty} Q(t) dt} \quad (12)$$

上式において、 $w < 1$ となる場合にはその逆数を重みとする。

4. 4. 3. 重み付き ($w \geq 1$) 解析の結果

図 3 の赤点グラフで示される解析結果は、重みなしの解析である青点グラフと同様な傾向を示すが、異なるのは試行値として $N=2$ 万～7 万人が与えられたとき、 δ^2 値に明らかに差が生じたことである。その結果を表 1 にまとめた。表 1 は試行値として $N=4$ 万人が与えられたとき δ^2 値は最小であることを示している。さらに、表 1 に示される人口 N の収束値は、試行値 N が 5 万人以上で

試行値 $N (\times 10^4)$	収束値 N	δ^2
7	63680	33.2464
6	56559	32.9582
5	49315	32.3232
4	43496	32.1907
3	34057	32.2152
2	32160	32.3884

Table 1. Dependence of δ^2 with w on the trial values of N .

は試行値より小さな値に収束しているが、4 万人以下では試行値より大きな値に収束する。以上から最確値は 4 万～5 万人の間に存在する事が結論された。そこで、試行値 N を 4 万人から 1000 人刻みで変化させて解析を繰り返した。その結果 $N=4.4$ 万人からスタートしたとき最適解が得られた。その最終結果を示す計算フォームを図 5 に示す。

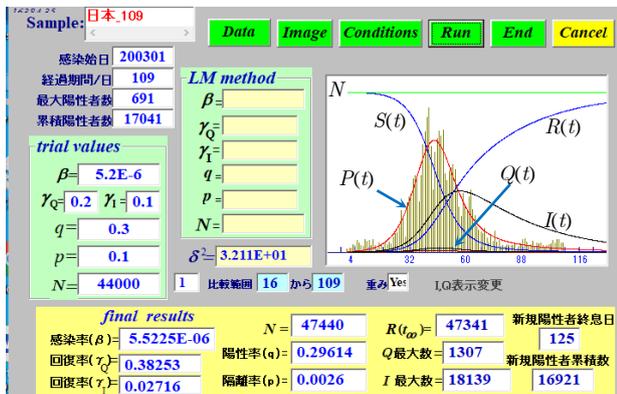


Fig. 5 Final form of the best fit results in the case of using $N=4.4 \times 10^4$ as a trial value.

図 5 の解析結果に示される最大の特徴は、市中感染者数を表す $I(t)$ 曲線が非常に緩やかに減衰していることである。このような曲線が現れた原因は市中感染者 $I(t)$ の回復率 γ_I と隔離率 p が非常に小さい値 (0.02716 と 0.0026) に因る。このように、図 1 の陽性者数分布が速やかに終息せず、数十人の感染者が続くプラトーの発生が $I(t)$ の存在で説明される。このような現象は図 4 に示される $P(t)$ 曲線が速やかに終息する結果を与える試行値 $N \geq 8$ 万人で計算した場合には表れない。参考ま

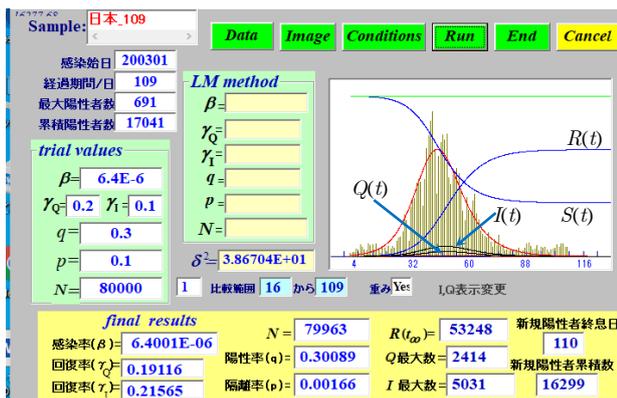


Fig. 6 The best fit results for $N=8 \times 10^4$.

で $N=8$ 万人の場合の結果を図 6 に示す。この場合、 $I(t)$ と $Q(t)$ 曲線はほとんど類似の形を示す。

図 5, 6 において $S(t), R(t), Q(t), I(t)$ 曲線は人口 N の収束値 (図の下辺にある *final results* に示される) で規格化されており、 $P(t)$ 曲線は最大陽性者数 (691 名) で規格化されている。

最後に、本計算では、 $P(t)$ 曲線の値が 10 人以下になったら感染終息と定義した。また、 $R(t_\infty)$ は感染終息後の回復者数 (死亡者を含む) を表す。最適解を示す図 5 では、この人数は N の収束値とほとんど一致している。

5. 結論

図 1 に示される新規感染者数分布が速やかに終息しない原因は、市中感染者 $I(t)$ の存在にあることが示された。これは、感染症対策としては広範囲に渡る PCR 検査を実施して隔離治療を行うことで γ_I と p を増加させる対策が有効であることを示している。この対策は K 防疫として韓国が採用し成功した方法である。

謝辞

貴重なご意見と情報をお寄せいただいた森 和信氏と芥川 忠正氏に感謝いたします。

参考文献

- (1) W O Kermack and A G McKendrick, Proc. Roy. Soc. A **115** (1927) 700.
- (2) Takao Skurai, *New method for numerical analysis of thermoluminescence glow curves*, J. Phys. D: Appl. Phys. **28** (1995) 2139. T Sakurai, A Tomita, and Y Fukuda, *Simultaneous analysis of the glow curves of thermoluminescence and thermally stimulated exo-electron emission*, J. Phys. D: Appl. Phys. **32** (1999) 2290.
- (3) 小田垣 孝, ” 新型コロナウイルスの蔓延に関する一考察” 物性研究電子版, Vol **8**, No2, 082101. www.kumamoto84.sakura.ne.jp/Corona/odagaki.pdf
- (4) “数値シミュレーション入門”, 峰村吉奏 著, 森北出版.
- (5) D. W. Marquardt, *An Algorithm for least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters*, J. Soc. Indust. Appl. Math., **11** (1963) 431.

原稿受付日 令和3年2月18日