

### 3 次元電磁カスケード理論

#### A 近似エネルギー流ラテラル分布関数の計算

#### VI. 電子数・エネルギー流・平均エネルギーの

#### A 近似ラテラル分布関数のグラフ

新 居 誠 彦\*

A Calculation of Energy-flow Lateral Distribution Function under Approximation A

in Three Dimensional Electron-Photon Cascade Theory

VI. Graphs of Lateral Distribution Functions for Electron Number,

for Electron Energy Flow and for Mean Energy of a Single Electron.

NII Nobuhiko

#### **Abstract**

We have calculated the lateral distribution functions for the electron number;  $\Pi_2(E_0, E, r, t)$ , for the energy-flow of electron;  $\Pi_E(E_0, E, r, t)$ , and for the mean energy lateral distribution of a single electron;

$\Pi_E(E_0, E, r, t)/\Pi_2(E_0, E, r, t)$ , in the three-dimensional cascade theory under Approximation A. The graphs of these lateral distribution functions are displayed.

**Keywords** : three-dimensional cascade theory, lateral distribution function for electron number, energy-flow lateral distribution function, mean energy lateral distribution of a single electron.

#### 1. はじめに

電磁カスケード理論 A 近似 3 次元拡散方程式の解を求めた。それを基に、電子数や電子エネルギー流、単位電子の平均エネルギーのラテラル分布関数； $\Pi_2$ ,  $\Pi_E$ ,  $e_E$  を計算した。これらのグラ

フを本稿で示す。

#### 2. 電子数ラテラル分布関数積分スペクトル

$\Pi_2(E_0, E, r, t)$ .

第Ⅲ稿で次の表式を得た：

$$\frac{\Pi_2(E_0, E, r, t)}{(E/E_s)^2} = \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \left(\frac{Er}{E_s}\right)^{s-2} \times \frac{H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \mathfrak{M}_2(E_0, E, r, s)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{\lambda_1''(s)t + (\mathfrak{M}_2'/\mathfrak{M}_2)'}} \Big|_{s=s_1}, \quad (2.1)$$

$$\mathfrak{M}_2(E_0, E, r, s) = \sum_{i=1}^M \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}} \times \left\{ \Gamma\left(-\frac{s}{2}+1, \frac{1}{\alpha_i(s)} \left(\frac{Er}{E_s}\right)^2\right) - \Gamma\left(-\frac{s}{2}+1, \frac{1}{\alpha_i(s)} \left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^2\right) \right\}. \quad (2.2)$$

(2.2)の  $\Gamma(a, x)$  の数値は文献 1 に依る。

入射エネルギーは

$E_0/E = 10^8, 10^6, 10^4, 10^3$  とし、深さ  $t$  は各入射エ

ネルギーの電子数遷移曲線が最大となる深さ  $T$  (Optimum thickness) <sup>2)</sup> とした：

$$t = T = -\frac{1}{\lambda_1'(1)} \left( \ln \frac{E_0}{E} - 1 \right). \quad (2.3)$$

## 2.1. 重畳のおもみ

(2.2)における不完全ガンマ関数の重畳のおもみ

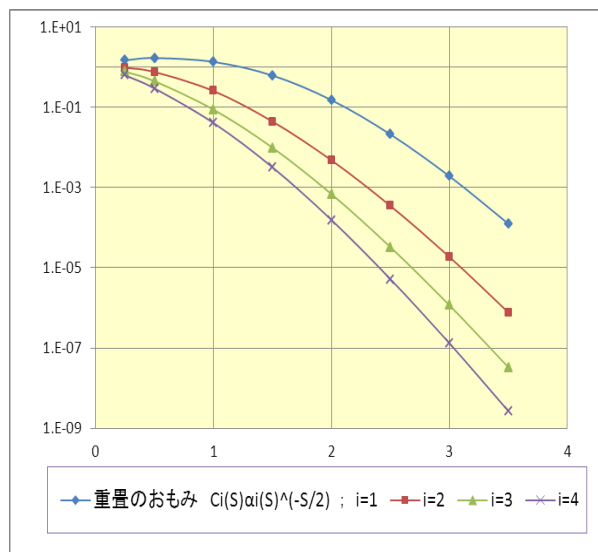


図 2-1. 重み  $w_i(s)$  vs.  $s$

$w_i(s) = C_i(s) \alpha_i(s)^{-s/2}$  ( $i=1 \sim 4$ ) を求める基

になる数値  $C_i(s)$ ,  $\alpha_i(s)$  は第Ⅲ稿補遺Ⅱに掲載している。おもみのグラフを図 2-1 に示す。

重畳の項数は  $s \leq 0.5$  を除き高々 2 項でよいことがわかる。よって(2.2)では  $M=2$  とした。

## 2.2. 鞍点 (エイジ)

次式から決定した鞍点  $s_1$  を図 2-2, 2-3 に示す。

鞍点は通常エイジ(age)と呼ばれる。

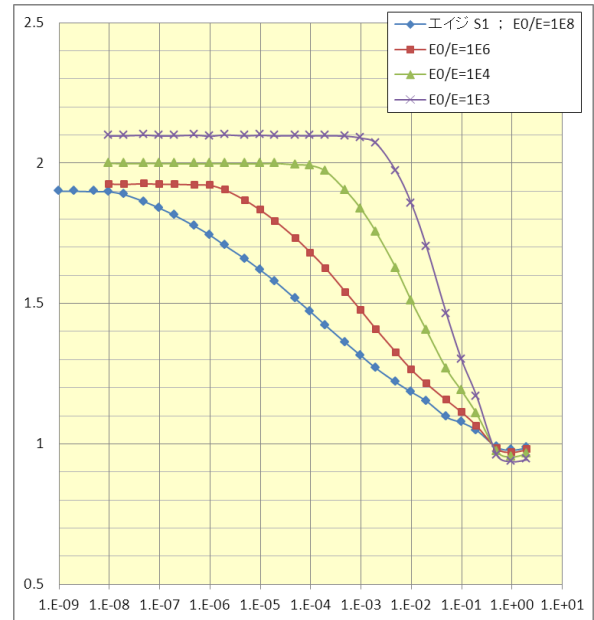


図 2-2. エイジ  $s_1$  vs.  $Er/E_s$

$$\ln \frac{E_0}{E} + \ln \frac{Er}{E_s} + \lambda_1'(s)t + \frac{\mathfrak{M}_2'}{\mathfrak{M}_2} = 0.$$

(i) エイジは  $E_0$  依存が顕著である。(遠方を除い

て)  $E_0$  が大きいほどエイジは若い。

(ii) コア近傍ではほぼ一定である。外に向かって若くなる。

(iii) コア遠方では最小のあと U 字型を描くように古くなる。この様子を線形目盛でみる(図 2-3)。

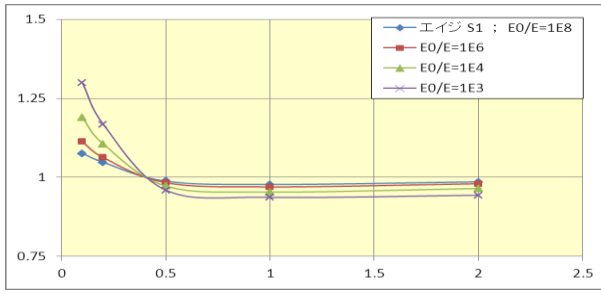


図 2-3. 遠方のエイジ

$$s_1 \text{ vs. } Er/E_s$$

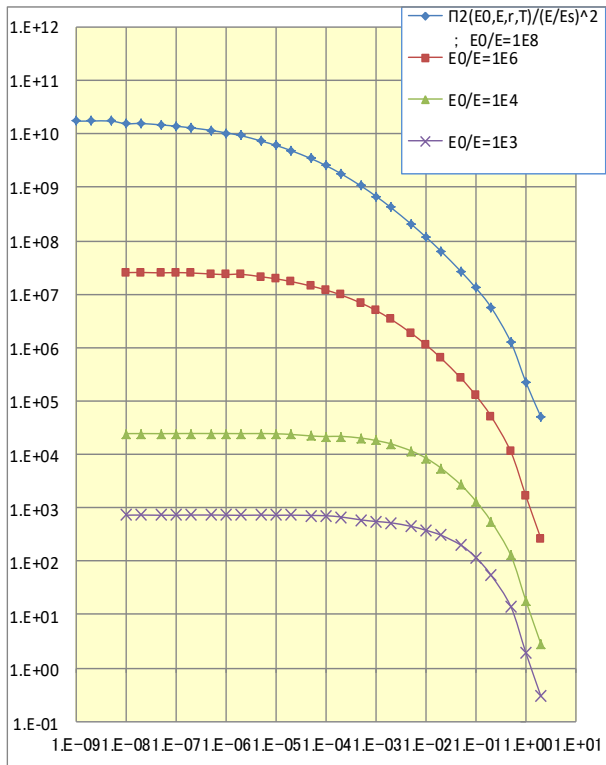
$Er/E_s = 0.41 \sim 0.42$  辺りでエイジは 1 に収斂し

最小値を経た後  $Er/E_s = 0.6 \sim 0.7$  辺りから緩や

かに古くなる。収斂後  $E_0$  依存は逆転する。

### 2.3. 積分スペクトル

(2.1)の電子数ラテラル分布関数積分スペクトル  $\Pi_2(E_0, E, r, T) / (E/E_s)^2$  の  $Er/E_s$  に対するグラフを図 2-4 に示す。



$$\Pi_2(E_0, E, r, T) / (E/E_s)^2 \text{ vs. } Er/E_s$$

図 2-4

$$E_0/E = 10^8, 10^6, 10^4, 10^3.$$

深さは  $t = T$ ，入射エネルギーに対してそれぞれ  $T = 17.6, 12.9, 8.3, 6.0$ ．積分スペクトルの形状について，(i)コア近傍，(ii)中間，(iii)遠方の 3 領域において吟味する。

(i)  $\mathfrak{M}_2$ ，(2.2)，の中の 2 つの不完全ガンマ関数

の差を第 1 種の不完全ガンマ関数の差で表して

$$\gamma(-s/2+1, a_0 r^2) - \gamma(-s/2+1, ar^2) = \Delta(r)$$

とし，スペクトルを  $\Pi_2(r)$  と略記すると

$$\Pi_2(r) \sim r^{s-2} \Delta(r).$$

$r \rightarrow 0$  のとき

$$\Delta(r) \rightarrow \frac{(a_0 r^2)^{-s/2+1} - (ar^2)^{-s/2+1}}{-s/2+1} \text{ となるから}$$

$$\Pi_2(r) \sim \frac{a_0^{-s/2+1} - a^{-s/2+1}}{-s/2+1} = \text{一定}. \text{ 分布関数は平}$$

坦となる。また， $s \rightarrow 2$  で

$$\Pi_2(r) \sim \ln(a_0/a) = \ln(E_0/E) < \infty \text{ である。平坦な}$$

範囲は，エイジ  $s_1 \approx \text{一定}$ ，の範囲とほぼ重なる。

(ii) 中間領域では  $s \leq 2$  である (図 2-2)。このと

き  $\Delta(0) = 0, \Delta(\infty) = 0$  だから  $\Delta(r)$  は上に凸。よ

って， $d\Delta(r)/dr = 0$  を満たす点の近辺で  $\Delta(r)$  は

ほぼ一定。この範囲で  $\Pi_2(r) \sim r^{s-2}$ ，いわゆる

$s-2$  乗則が成り立つ。

(iii) 遠方では，(2.2)における第 2 の不完全ガンマ関数が無視できる。初めの不完全ガンマ関数は

$$\Gamma(-s/2+1, ar^2) \rightarrow (ar^2)^{-s/2} e^{-ar^2} \quad (2.4)$$

$(r \rightarrow \infty)$  となるから、いわゆるガウス型より速

く減少する： $\Pi_2(r) \sim r^{-2} e^{-ar^2}$ .

分布関数どうしを直接比較するには(2.1)を体積で規格化、すなわち

$$\int_0^\infty \Pi_2(E_0, E, r, T) 2\pi \frac{Er}{E_s} d\left(\frac{Er}{E_s}\right) = 1$$

として、そのグラフを比較するのが適切である (図 2-5)。

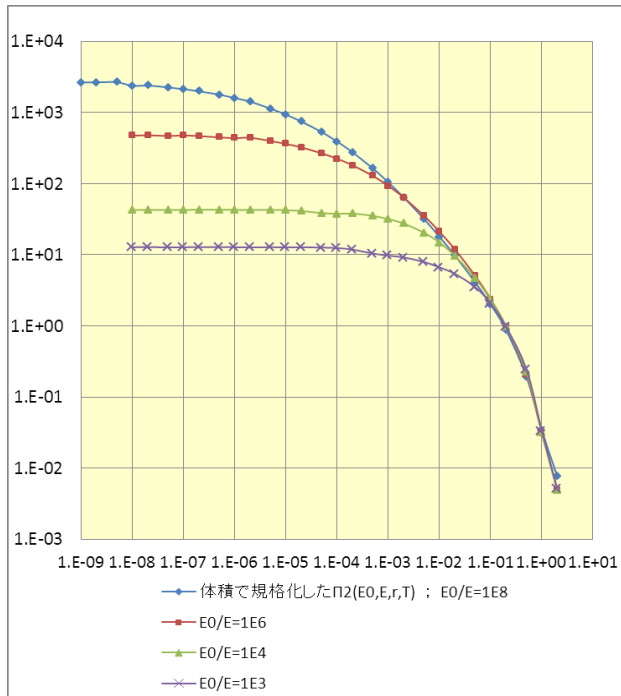


図 2-5. 図 3-1 のグラフを  
体積で規格化したもの

遠方の領域では図 2-2 にみるようにエイジの  $E_0$

依存性は逆転するが、 $E_0/E$  に強くは依存しない。

よってコア遠方での形状はほとんど  $E_0/E$  に依らない。

### 3. エネルギー流ラテラル分布関数

エネルギー流のラテラル分布関数

$\Pi_E(E_0, E, r, t)$  の表式を第IV稿で得た。

$$\frac{\Pi_E(E_0, E, r, t)}{E_s (E/E_s)^3} = \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \left(\frac{Er}{E_s}\right)^{s-3} \times \frac{H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \mathfrak{M}_E(E_0, E, r, s)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{\lambda_1''(s)t + (\mathfrak{M}'_E/\mathfrak{M}_E)'}} \Big|_{s=s_2}, \quad (3.1)$$

$$\mathfrak{M}_E(E_0, E, r, s) = \sum_{i=1}^M \frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2-1/2}} \times \left\{ \Gamma\left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{1}{\alpha_i(s)} \left(\frac{Er}{E_s}\right)^2\right) - \Gamma\left(-\frac{s}{2} + \frac{3}{2}, \frac{1}{\alpha_i(s)} \left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^2\right) \right\}. \quad (3.2)$$

(3.2)の  $\Gamma(a, x)$  の数値は文献 1 に依る。

#### 3.1. 重畳のおもみ

図 3-1 は、(3.2)における重畳のおもみ

$w_i(s) = C_i(s) \alpha_i(s)^{-s/2+1/2}$  ( $i=1 \sim 4$ ) を示す。

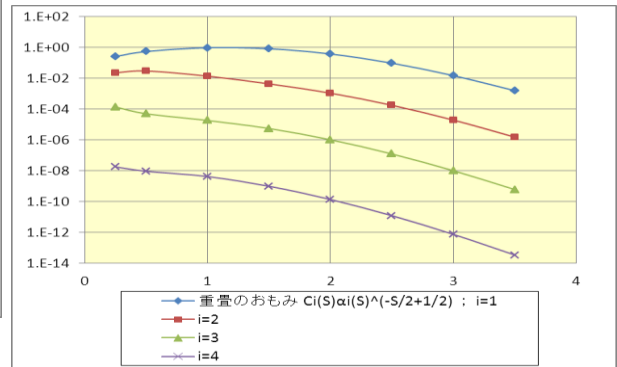


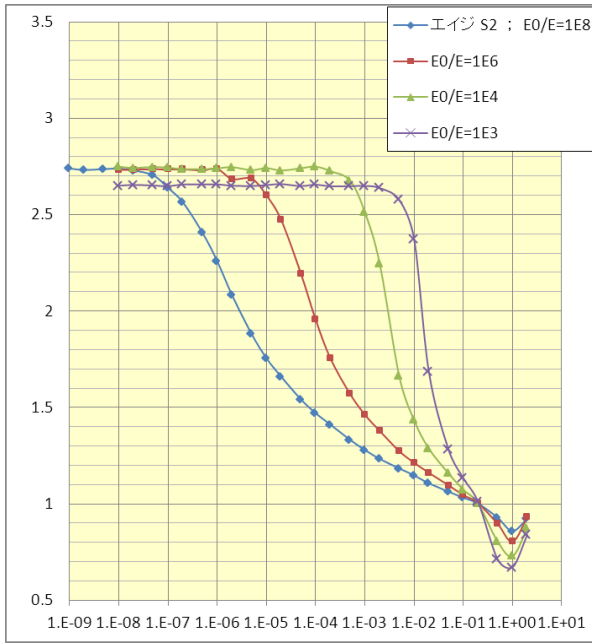
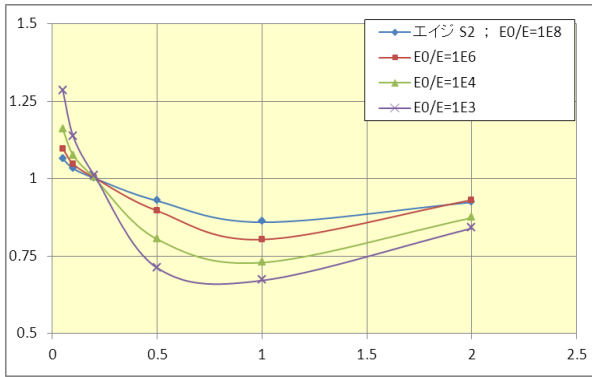
図 3-1. エネルギー流の重畳のおもみ

$i=3, 4$  は無視できる。粒子数の場合に合わせて  $i=2$  は採用し、(3.2)で  $M=2$  とした。

#### 3.2. エイジ $s_2$

$$\ln \frac{E_0}{E} + \ln \frac{Er}{E_s} + \lambda_1'(s)t + \frac{\mathfrak{M}'_E}{\mathfrak{M}_E} = 0$$

から決定したエイジ  $s_2$  を図 3-2, 3-3 に示す。

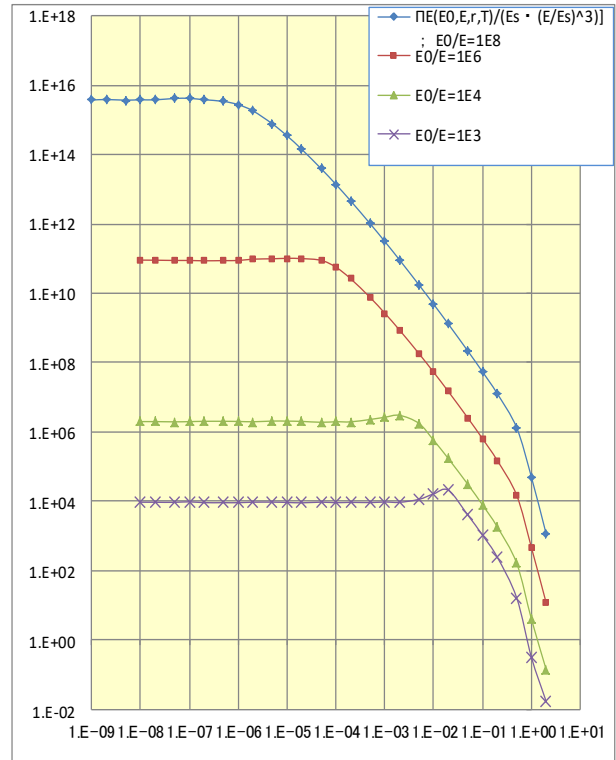
図 3-2. エイジ  $s_2$  vs.  $Er/E_s$ 図 3-3 遠方での  $s_2$  vs.  $Er/E_s$ 

コア近くで値はほぼ一定, 外に向かって若くなる。  
 $Er/E_s = 0.20 \sim 0.21$  で 1 に収斂する。そのあと最小値を経て増加する (U 字形の変化を示す)。粒子数の場合と同じく収斂後は  $E_0/E$  依存性が逆転する。

### 3.3. エネルギー流ラテラル分布関数 積分スペクトル

(3.1) の電子数ラテラル分布関数積分スペクトル  $\Pi_E(E_0, E, r, T) / (E_s (E/E_s)^3)$  の  $Er/E_s$  に対するグラフを図 3-4 に示す。

$$E_0/E = 10^8, 10^6, 10^4, 10^3, \quad t = T.$$



$$\Pi_E(E_0, E, r, T) / E_s (E/E_s)^3 \text{ vs. } Er/E_s$$

図 3-4.

分布関数の形状に, (i) コア近傍, (ii) 中間, (iii) 遠方で特徴がみえる。

(i)  $\mathfrak{M}_E$ , (3.2), の中の 2 つの不完全ガンマ関数

の差を第 1 種の不完全ガンマ関数の差で表して

$$\gamma(-s/2+3/2, a_0 r^2) - \gamma(-s/2+3/2, a r^2) = \Delta_E(r)$$

とおくと,  $\Pi_E(r) \sim r^{s-3} \Delta(r)$ .

$r \rightarrow 0$  のとき

$$\Delta(r) \rightarrow \frac{(a_0 r^2)^{-s/2+3/2} - (a r^2)^{-s/2+3/2}}{-s/2+3/2} \quad \text{となり}$$

$$\Pi_E(r) \rightarrow \frac{a_0^{-s/2+3/2} - a^{-s/2+3/2}}{-s/2+3/2} = \text{一定}.$$

よって分布関数は平坦となる。

分布関数どうしを直接比較するには(3.1)を体積

で規格化, すなわち

$$\int_0^\infty \Pi_E(E_0, E, r, T) 2\pi \frac{Er}{E_s} d\left(\frac{Er}{E_s}\right) = 1$$

として, そのグラフを比べるのが適切である (図 3-5)。図 3-4 の各関数を体積積分 (数値積分) すると積分に圧倒的に寄与する領域が

$Er/E_s \approx 2 \times 10^{-2} \sim 2 \times 10^{-1}$  であるのでこの範囲

で各グラフはほぼ重なる。重なった結果は恰も一つの直円錐を平面に平行に輪切りにした形を思わせる。閾値が下がるほど ( $E_0/E \rightarrow$  大) 粒子数が増してエネルギーの流量も増す。その粒子を生む親粒子のうち高いエネルギーのものほど中心に集中する (第Ⅲ稿(6.5)) ので, コア近傍は周辺よりも流量の増大がはやい。

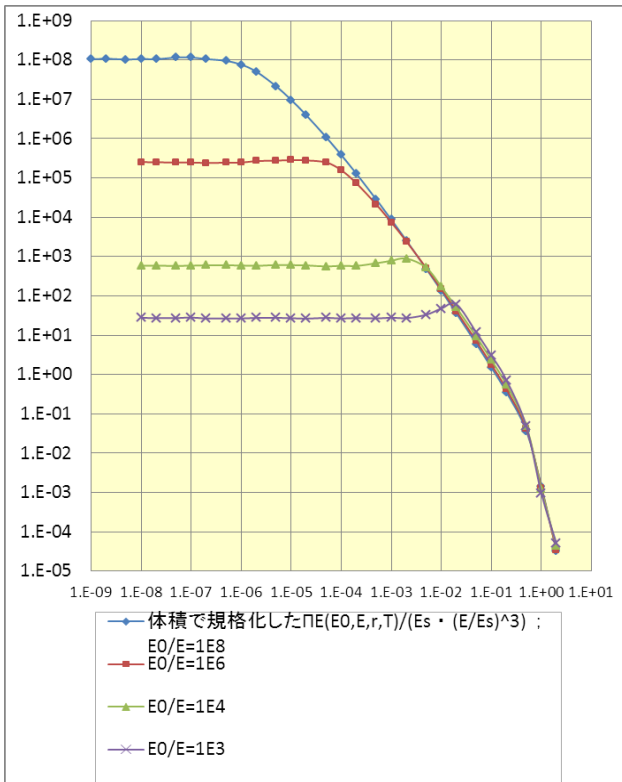


図 3-5. 体積で規格化した  
エネルギー流積分スペクトル

このようにして円錐は上に伸びていき平坦な範囲は狭くなる。

(ii) 全領域で  $s < 3$  (図 3-2) である。よって

$\Delta_E(0) = 0, \Delta_E(\infty) = 0$ ,  $\Delta_E(r)$  は上に凸。したが

って  $d\Delta(r)/dr = 0$  を満たす点がある。この近辺で

$\Delta_E(r)$  はほぼ一定。この範囲で  $\Pi_E(r) \sim r^{s-3}$ 。

粒子数の場合の呼称,  $s-2$  乗則, に準えて “ $s-3$  乗則” とでも呼ぶべき状況が成り立つ。

“ $s-3$  乗則” の成り立つ範囲は  $E_0/E \rightarrow$  小で狭く

なっていく。  $E_0/E = 10^3, 10^4$  で “ $s-3$  乗則” の成

り立つ範囲の始まり (平坦領域の終わり) 附近で分布関数の形状に凸型がみられる (エネルギー流の角分布の検討が必要かも知れないが, 今, 理由は不明)。

(iii)  $Er/E_s \gtrsim 0.5$  で分布関数の形状は急激に減

少する。遠方では, (3.2) において第 2 の不完全ガンマ関数が無視できる。初めの不完全ガンマ関数は  $r \rightarrow$  大のとき次のように表される:

$$\Gamma(-s/2 + 3/2, ar^2) \rightarrow (ar^2)^{-s/2 + 1/2} e^{-ar^2}. \quad (3.3)$$

よって  $\Pi_E(r) \sim r^{-2} e^{-ar^2}$ . 粒子数の場合と同じ関数形となる。

#### 4. 単位電子の平均エネルギー

(3.1) を (2.1) で除した量は

$$\frac{\Pi_E(E_0, E, r, T)/E}{\Pi_2(E_0, E, r, T)} \text{ となる。}$$

$\Pi_E/\Pi_2$  は, 中心からの距離  $r$  での電子の平均エネルギーである。<sup>3), 4)</sup> ここでは

$$\frac{\Pi_E(E_0, E, r, T)}{\Pi_2(E_0, E, r, T)} = e_E(E_0, E, r, T) \quad (4.1)$$

と記し, 単位電子の平均エネルギーと呼ぶことに

する。  $e_E(E_0, E, r, T)/E$  を図 4-1 に示す。

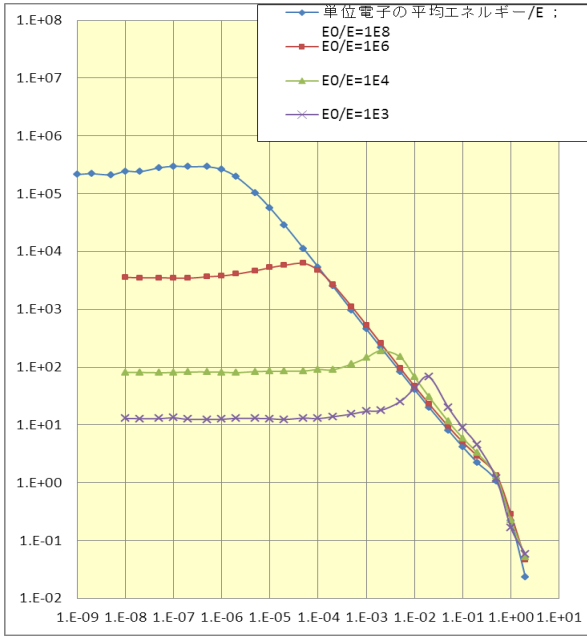


図 4-1. 単位電子の平均エネルギー

$$e_E(E_0, E, r, T)/E$$

次の特徴がある。

(i) コア近傍で平均エネルギーは略一定。

$Er/E_s = 10^{-8}$  (ほぼコア中心) における

$e_E(E_0, E, 0, T)/E_0$  を図 4-2 に示す。単位電子の

平均エネルギーは  $E_0/E$  に対して緩やかに減少

する ( $E_0/100 \sim E_0/400$ )。

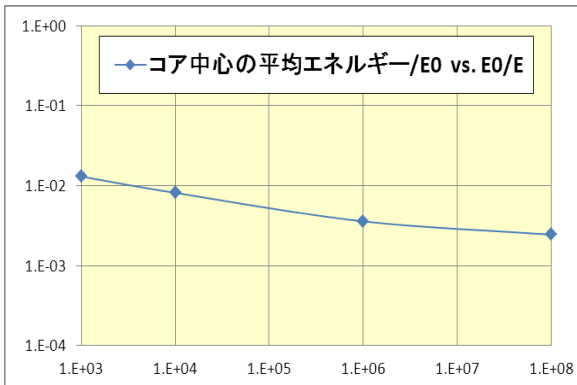


図 4-2.  $e_E(E_0, E, 0, T)/E_0$  vs.  $E_0/E$

(ii) 平坦な範囲は閾値が下がる ( $E_0/E \rightarrow$  大) ほ

ど狭くなっていく。この状況には前節の(i)で述べた円錐が描像できる。図 4-1 も“切断した円錐”の構造をもつ。

(iii) エネルギー流のラテラル分布に現れた凸形が平坦領域と直線領域の境界にみえる。閾値が下がるほど凸の傾向が希薄になる。

(iv) 直線領域でのベキ  $\simeq -1$ 。

理由は、この領域での  $r$ -依存性がほぼ

$$(r-3 \text{ 乗則}) \div (r-2 \text{ 乗則}) = r^{4-1} \simeq r^{-1}$$

$$(\Delta = s_2 - s_1 = -0.27 \sim -0.05) \text{ となるからであ}$$

る。

(v) 遠方,  $Er/E_s \gtrsim 0.5$ , で分布関数はベキ関数

より速く減少する。その理由は、

$r \rightarrow$  大で分布関数  $\Pi_2(r), \Pi_E(r)$  はともに

$$r^{-1} e^{-ar^2} \quad (a = (E/E_s)^2 / \alpha_i(s), i=1,2) \text{ の形をもつ}$$

$$(\S 2 \text{ の}(2.4), \S 3 \text{ の}(3.3)). \alpha_1(s), \alpha_2(s) \text{ (第}$$

Ⅲ稿 補遺Ⅱ) を図 4-3 に示す。  $\alpha_2 \gg \alpha_1$  だから

係数  $a$  において  $i=2$  の項は無視できる。  $\alpha_1(s)$

は  $s$  の増加関数である。

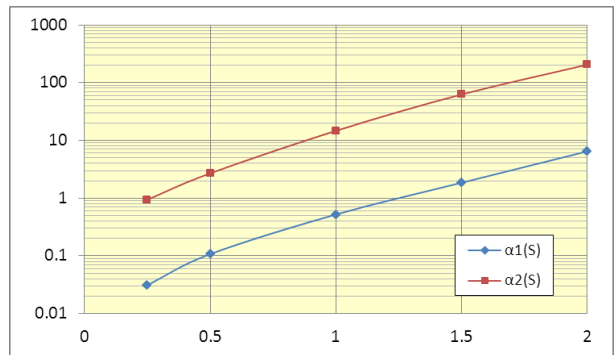


図 4-3.  $\alpha_1(s), \alpha_2(s)$  vs.  $s$ .

然るに図 4-4 にみるように、この領域で  $s_2 < s_1$  が

成り立つ。よって、 $1/\alpha_1(s_2) > 1/\alpha_1(s_1)$  が常に成り立つ。ゆえに単位電子の平均エネルギーは

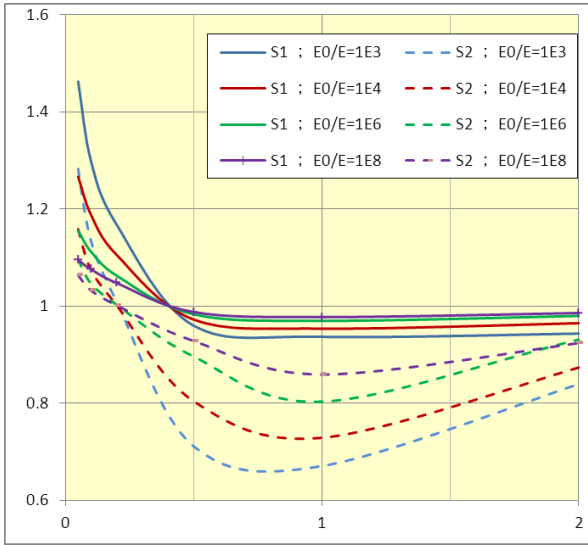


図 4-4  $s_1, s_2$ .vs.  $Er/E_s$

( $Er/E_s \gtrsim 0.25$ :  $s_1$  は実線,  $s_2$  は破線)

$$e_E(r) = \frac{\Pi_E(r)}{\Pi_2(r)} \sim e^{-\left(\frac{1}{\alpha_1(s_2)} - \frac{1}{\alpha_1(s_1)}\right)\left(\frac{Er}{E_s}\right)^2}. \quad (4.2)$$

遠方 ( $r \rightarrow \infty$ ) ではガウス型の減少を示す。

### 参考文献

- 1) 不完全ガンマ関数高精度計算サイト,  
<https://keisan.casio.jp/>
- 2) J.Nishimura, Handbuch der Physik, XLV/2(1967),1.
- 3) 文献 2 の p.83 にある数式.
- 4) K.Kamata, J.Nishimura, Suppl. of Prog. Theoret. Phys, 6(1958),93 の p.127 にある数式.

※ 足利大学名誉教授

原稿受付日 令和2年1月1日