3 次元電磁カスケード理論
A 近似エネルギー流ラテラル分布関数の計算
V. 解析接続法を用いた電子数・エネルギー流の
A 近似ラテラル分布関数の計算

新 居 誠 彦※

A Calculation of Energy-flow Lateral Distribution Function under Approximation A

in Three Dimensional Electron-Photon Cascade Theory.

Ⅴ. .Calculation of Lateral Distribution Functions for Electron-number

and for Electron Energy Flow, by Using The Analytic Continuation.

NII　Nobuhiko

Abstract

By using the analytic continuation method proposed by Nishimura in the cascade theory, we calculate the lateral distribution functions for electron number and for electron energy-flow, those are under Approximation A.

Keywords *: three-dimensional cascade theory, lateral distribution function, Approximation A, Analytic continuation.*

1. はじめに

電子数やエネルギー流のラテラル分布関数を求める計算は 3 次元拡散方程式の解（無限級数解）のハンケル変換が出発点である。級数解の本質的な部分は $\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\right)^m \phi_m(s,t)$ である。しかし解のハンケル変換について $\int_0^{\infty} x^{2m+1}J_0(rx)\,dx=0$ が恒等的に成り立つ（補遺Ⅰ）ので，このままの形では計算に適さない。西村はこの困難を克服するため解析接続法と呼ばれる優れた方法を提案した。[1) すなわち無限級数を複素平面へ解析接続によって拡張し，

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\right)^m \phi_m(s,t)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\Gamma(-p)\Gamma(p+1)dp\left(\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\right)^p \phi(p,s,t),$$

$$\phi(m,s,t)=\phi_m(s,t)$$

と表す。このハンケル変換は,補遺Ⅱに示すように非ゼロの結果を与える：

$$\int_0^\infty \left(\frac{x^2}{4}\right)^p J_0(rx)\,x\,dx = \frac{2\Gamma(p+1)}{\Gamma(-p)}\left(r^2\right)^{-p-1}.$$

よって，あとの計算が意味をもつ。

2. 電子数ラテラル分布関数

西村の与えた B 近似表式 [1] から A 近似部分をとり出せば,

(1) 微分スペクトルは

$$\pi_2 = -\frac{1}{8\pi^3}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int ds\,dp\left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{1}{E}\left(\frac{E}{E_s}\right)^2$$
$$\times\left(\frac{E^2r^2}{E_s{}^2}\right)^{-p-1}\Gamma(p+1)\mathfrak{M}_2(p,s,t), \tag{2.1}$$

$$\mathfrak{M}_2(m,s,t) = \Gamma(m+1)\phi_m(s,t). \tag{2.2}$$

(2) 積分スペクトルは

$$\Pi_2(E_0,E,r,t) = -\frac{1}{8\pi^3}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int \frac{ds\,dp}{s+2p}\left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{1}{E}$$
$$\times\left(\frac{E}{E_s}\right)^2\left(\frac{E^2r^2}{E_s{}^2}\right)^{-p-1}\Gamma(p+1)\mathfrak{M}_2(p,s,t) \tag{2.3}$$

である。

【注　西村の原著 [1] において，本来あるべきはずの因子 2 が(2.1),(2.3)から落ちている。校正ミスと思われるが元の表記のままで使用する】。

ところで西村の B 近似微分スペクトル，B 近似積分スペクトルの何れにおいても p に関する積分が実行されず数式のままで留まっている。[1] つまり B 近似表式に含まれる A 近似式の p-積分は(2.1),(2.3)の段階から動いていない。

そこで，われわれは，その段階から更に先へ計算を進めていく。

2.1. 微分スペクトル

計算の対象とする深さ t を主要項近似が使える領域に限る（ $\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t} \gg \mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}$ を満たす領域。$t \gtrsim 2$ なら十分である)。このとき $\phi_m(s,t) =$

$= H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\rho_m(s)$　と表すことができる。

$\rho_m(s)$ は第 I 稿(5.18)に示した漸化式から計算できる。解析接続によって(2.2)は次のように表される。

$$\mathfrak{M}_2(p,s,t) = \Gamma(p+1)H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\rho(p,s),$$
$$\rho(m,s) = \rho_m(s).$$

(2.1)に 2 重の複素ガンマ関数が現れる。

$$\pi_2 = -\frac{1}{8\pi^3}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int ds\,dp\left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{1}{E}\left(\frac{E}{E_s}\right)^2$$
$$\times\left(\frac{E^2r^2}{E_s{}^2}\right)^{-p-1}\Gamma^2(p+1)H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\rho(p,s). \tag{2.4}$$

2 重の $\Gamma(p+1)$ を各々次のように用いる：

(1) Prony 内挿法を複素平面へ拡張する。このとき次式が成り立つ。

$$\Gamma(p+1)\rho(p,s) = \sum_{i=1}^{M} C_i(s)\,\alpha_i(s)^p. \tag{2.5}$$

ここに，$C_i(s), \alpha_i(s)\ (i=1,\cdots,M)$ は $2M$ 個の既知数 $\rho_m(s)\ (m=0,1,\cdots,2M-1)$ から一意的に決定できる(第Ⅲ稿　補遺 I)。

$$\pi_2 = -\frac{1}{8\pi^3}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int ds\,dp\left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{1}{E}\left(\frac{E}{E_s}\right)^2 \sum_{i=1}^{M}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)}\times$$
$$\times\left(\frac{E^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)^{-p-1}\Gamma(p+1)H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}.$$

(2) もう一つは p-積分に利用する。

$\Gamma(p+1)$ は $p\ = -k-1\quad (k=0,1,\cdots)$ に極をもち留数が $(-1)^k/k!$ である。留数定理を用いて積分を実行すると次式が得られる。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \Gamma(p+1)\,dp\left(\frac{E^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)^{-p-1}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{E^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)^k=\mathrm{e}^{-\frac{E^2r^2}{\alpha(s)E_s{}^2}}.$$

.

よって，

$$\pi_2=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{ds}{E}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\left(\frac{E}{E_s}\right)^2\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)}\mathrm{e}^{-\frac{E^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}}. \qquad (2.6)$$

これが, (2.1)で止まっていた西村の計算を先へ進めたものである。(2.1)に欠落している因子 2 を(2.6)に補えば，Dirichilet 級数法を用いて得た微分スペクトル，第Ⅲ稿(3.1)，に一致する。

2.2. 積分スペクトル

積分スペクトルの西村の表式(2.3)は(2.1)をエネルギーで積分したものである。

一見, $1/(s+2p)$ の極を用いて p-積分が可能なように思われるが表式そのものが適性を欠く。すなわち，(2.3)は積分上限を無限大として，

$\int_E^\infty \pi_2(E)dE$ から導かれたものである。カスケードシャワーの中に入射エネルギーより大きいエネルギーは存在しない。よって積分範囲を (E,∞) とするのは適切とは言い難い。

以下では現象に則して範囲を (E,E_0) とする。

$$\int_E^{E_0}E^{-s-2p-1}dE=\frac{E_0{}^{-s-2p}-E^{-s-2p}}{-s-2p}$$ だから，

$$\Pi_2(E_0,E,r,t)=-\frac{1}{8\pi^3}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int\frac{dsdp}{-s-2p}E_0{}^s\frac{1}{E_s{}^2}$$
$$\times\left(\frac{r^2}{E_s{}^2}\right)^{-p-1}\Gamma^2(p+1)H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\rho(p,s)\times$$
$$\times\left(E_0{}^{-s-2p}-E^{-s-2p}\right)$$
$$=-\frac{1}{8\pi^3}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int\frac{dsdp}{-s-2p}\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{1}{r^2}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\left\{\left(\frac{E_0}{E}\right)^{-s}\left(\frac{E_0{}^2r^2}{E_s{}^2}\right)^{-p}-\left(\frac{E^2r^2}{E_s{}^2}\right)^{-p}\right\}$$
$$\times\Gamma^2(p+1)\rho(p,s).$$

【注 $p=-s/2$ は極を与えない。なぜなら

$$\lim_{p\to -s/2}\frac{1}{2p+s}\left\{\left(\frac{E}{E_0}\right)^s\left(\frac{E_0{}^2r^2}{E_s{}^2}\right)^{-p}-\left(\frac{E^2r^2}{E_s{}^2}\right)^{-p}\right\}$$
$$=\left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^s\ln\frac{E_0}{E}<\infty$$ だからである】

ここで $\Gamma^2(p+1)$ の各々に次の役割を与える。

(1) 一方は Prony 内挿法の関係式に当てる：

$$\Gamma(p+1)\rho(p,s)=\sum_{i=1}^{M}C_i(s)\alpha_i(s)^p.$$

よって

$$\Pi_2(E_0,E,r,t)$$
$$=-\frac{1}{8\pi^3}\int_{-i\infty}^{i\infty}\int\frac{dp}{-s-2p}\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{ds}{r^2}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\sum_{i=1}^{M}C_i(s)\left\{\left(\frac{E_0}{E}\right)^{-s}\left(\frac{E_0{}^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)^{-p}-\left(\frac{E^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)^{-p}\right\}$$
$$\times\Gamma(p+1).$$

(2) 他方は p-積分に当てる：$\Gamma(p+1)$ の極と留数を用いると，

$$\Pi_2(E_0,E,r,t).$$
$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^s\frac{ds}{r^2}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}}$$
$$\times\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k-s/2+1)}$$
$$\times\left\{\left(\frac{E_0{}^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)^{k+1-s/2}-\left(\frac{E^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)^{k+1-s/2}\right\}.$$

然るに $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{k+a}}{k!(k+a)}$ は第 1 種不完全ガンマ関数 $\gamma(a,x)$ の級数表示そのものである。2) ゆえに,

$$\Pi_2(E_0,E,r,t)$$
$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^s\frac{ds}{r^2}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}}\{\gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{E_0{}^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)$$
$$-\gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{E^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)\}. \tag{2.7.1}$$

第 2 種の不完全ガンマ関数 2) を用いると

$$\Pi_2(E_0,E,r,t)$$
$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^s\frac{ds}{r^2}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}}\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{E^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)$$
$$-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{E_0{}^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)\}. \tag{2.7.2}$$

これが, (2.3)で止まっていた西村の計算を先へ進めたものである。(2.3)に欠落している因子2 を補えば(2.7.2)は，Dirichlet 級数を用いて得た積分スペクトル，第Ⅲ稿(3.2)，に一致する。

（なお当然のことであるが(2.7.2)は(2.6)のエネルギー積分からも直接，計算できる)。

2.3. 等価性と，正しさの証明

解析接続の方法に依るラテラル分布関数の計算において西村が実行していなかった p に関する積分を $\Gamma(p+1)$ の極を用いて実行した。その結果は著者が Dirichlet 級数を用いて得た結果と一致する。この事実は 2 つのことを物語る。

(1) 解析接続を用いる西村の方法と Dirichlet 級数を用いる著者の方法とは等価である。

(2) 数学的には異なる 2 つの方法で得た結果が一致することは,「それぞれの計算が正しい」ことを証明している。

3.　解析接続の方法によるエネルギー流ラテラル分布関数の計算

エネルギー流ラテラル分布関数を西村の解析接続の方法を適用して計算してみる。

まず, 電子成分の担うエネルギー流のラテラル分布関数は次式で定義される。1)

$$\Pi_E(E_0,E,r,t)$$
$$=\int_E^{E_0}E\pi_2(E_0,E,r,t)dE. \tag{3.1}$$

次に, 解析接続の方法に基づいて西村が与えた微分スペクトルは(2.1),(2.2)から,

$$\left.\begin{aligned}&\pi_2=-\frac{1}{8\pi^3}\iint\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{dsdp}{E}\left(\frac{E}{E_s}\right)^2\\&\times\left(\frac{E^2r^2}{E_s{}^2}\right)^{-p-1}\Gamma^2(p+1)\rho(p,s,t),\\&\rho(m,s,t)=\phi_m(s,t).\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

ここで，対象とする深さを $t>2$ とする。このとき主要項近似が適用でき $\phi_m(s,t)$ は次式のように表される。

$$\phi_m(s,t)=H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\rho_m(s). \tag{3.3}$$

$\rho_m(s)$ は第 I 稿(5.18)に示した漸化式から計算できる量である。

(3.1)の積分を実行する。範囲は西村の手法と異なり現象に則して (E,E_0) とする。積分値は

$\frac{E_0{}^{-s-2p+1}-E^{-s-2p+1}}{-s-2p+1}$. よって,

$$\Pi_E(E_0,E,r,t)$$
$$=-\frac{1}{8\pi^3}\iint\frac{dsdp}{-s-2p+1}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\frac{E_0}{r^2}$$
$$\times\{\left(\frac{E_0{}^2r^2}{E_s{}^2}\right)^{-p}-\left(\frac{E_0}{E}\right)^{s-1}\left(\frac{E^2r^2}{E_s{}^2}\right)^{-p}\}$$
$$\times\Gamma^2(p+1)\rho(p,s), \tag{3.4}$$

$$\rho(m,s)=\rho_m(s).$$

(3.4)に現れる 2 重のガンマ関数の各々を次の用途に当てる。

(1) 一方は Prony 内挿法の関係式にあて,

$$\Gamma(p+1)\rho(p,s)=\sum_{i=1}^{M}C_i(s)\alpha_i(s)^p$$

とする。このとき,

$$\{\left(\frac{E_0{}^2r^2}{E_s{}^2}\right)^{-p}-\left(\frac{E_0}{E}\right)^{s-1}\left(\frac{E^2r^2}{E_s{}^2}\right)^{-p}\}$$
$$\times\Gamma^2(p+1)\rho(p,s),$$
$$=\Gamma(p+1)\sum_{i=1}^{M}C_i(s)$$
$$\times\{\left(\frac{E_0{}^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)^{-p}-\left(\frac{E_0}{E}\right)^{s-1}\left(\frac{E^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)^{-p}\}.$$

(2) 他方は p-積分にあてる。$\Gamma(p+1)$ は

$p=-k-1$ に，留数が $(-1)^k/k!\ (k=0,1,\cdots)$ の極

をもつ。留数定理を適用して,

$$\Pi_E(E_0,E,r,t)$$
$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c\frac{E_0ds}{r^2}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\{\left(\frac{E_0{}^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)^{k+1}-\left(\frac{E_0}{E}\right)^{s-1}\left(\frac{E^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)^{k+1}\}.\quad(3.5)$$

多少の計算のあと次式が得られる。

$$\Pi_E(E_0,E,r,t)$$
$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c\left(\frac{E_0r}{E_s}\right)^s\frac{ds}{r^3}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2-1/2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k-s/2+3/2)}$$
$$\times\frac{1}{2}\{\left(\frac{E_0{}^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)^{k-s/2+3/2}-\left(\frac{E^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)^{k-s/2+3/2}\}.$$
$$(3.6)$$

k に関する級数和はまさに第 1 種不完全ガンマ関数の表式である：

$$\gamma(a,x)=\int_0^x t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+a}}{n!(n+a)}.$$

よって,

$$\Pi_E(E_0,E,r,t)$$
$$=\frac{E_s}{4\pi^2 i}\int_c\left(\frac{E_0r}{E_s}\right)^s\frac{ds}{r^3}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2-1/2}}$$
$$\times\frac{1}{2}\{\gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{E_0{}^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)$$
$$-\gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{E^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)\}.\quad(3.7.1)$$

第 2 種不完全ガンマ関数を用いると,

$\Gamma(a,x)=\Gamma(a)-\gamma(a,x)$ だから,

$$\Pi_E(E_0,E,r,t)$$
$$=\frac{E_s}{4\pi^2 i}\int_c\left(\frac{E_0r}{E_s}\right)^s\frac{ds}{r^3}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2-1/2}}$$
$$\times\frac{1}{2}\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{E^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)$$
$$-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{E_0{}^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}\right)\}.\quad(3.7.2)$$

(2.1)に欠落している因子 2 を補えば(3.7.2)は, 積分スペクトル，第Ⅳ稿(2.3)，と一致する。

解析接続を用いる西村の方法と Dirichlet 級数を用いる著者の方法とは等価であることがエネルギー流ラテラル分布関数にも示される。

文献

1) J.Nishimura,Handbuch der Physik, XLV/2(1967),p.42 の(21.17)式.

2) 森口繁一，宇田川銈久，一松 信，数学公式Ⅲ（特殊函数)，岩波書店(1994),3.

補遺Ⅰ. $\int_0^\infty \boldsymbol{x}^{2m+1}\boldsymbol{J}_0\left(\boldsymbol{rx}\right)\boldsymbol{dx}=0$ **の証明**

0 次のベッセル関数の級数表示；

$$J_0\left(rx\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\left(j!\right)^2}\left(-\frac{r^2x^2}{4}\right)^j$$

を複素平面へ拡張すると,

$$J_0\left(rx\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Gamma\left(-p\right)\Gamma\left(p+1\right)}{\Gamma^2\left(p+1\right)}dp\left(\frac{r^2x^2}{4}\right)^p.$$

$$A=\int_0^\infty x^{2m+1}J_0\left(rx\right)dx$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Gamma\left(-p\right)dp}{\Gamma\left(p+1\right)}\left(\frac{r^2}{4}\right)^p$$
$$\times\lim_{M\to\infty}\int_0^M\left(x^2\right)^{p+m}d\left(\frac{x^2}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\Gamma\left(-p\right)dp}{\Gamma\left(p+1\right)}\left(\frac{r^2}{4}\right)^p$$
$$\times\lim_{M\to\infty}\frac{M^{p+m+1}}{2\left(p+m+1\right)}.$$

被積分関数は $p=-m-1$ に極をもつから,

$$A=\frac{m!}{2\Gamma\left(-m\right)}\left(\frac{r^2}{4}\right)^{-m-1}.$$

然るに $\Gamma\left(-m\right)=\pm\infty\left(m=0,1,\cdots\right)$. [2)]

ゆえに $A=0.$

補遺Ⅱ.

$\int_0^\infty\left(\frac{\boldsymbol{x}^2}{4}\right)^p\boldsymbol{J}_0\left(\boldsymbol{rx}\right)\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{dx}=\frac{2\Gamma\left(\boldsymbol{p}+1\right)}{\Gamma\left(-\boldsymbol{p}\right)}\left(\boldsymbol{r}^2\right)^{-\boldsymbol{p}-1}$ **の証明**

複素平面へ拡張したベッセル関数を用いる。

$$A=\int_0^\infty\left(\frac{x^2}{4}\right)^pJ_0\left(rx\right)x\,dx$$
$$=\int_0^\infty x\,dx\left(\frac{x^2}{4}\right)^p$$
$$\times\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\Gamma\left(-q\right)\Gamma\left(q+1\right)}{\Gamma^2\left(q+1\right)}dq\left(\frac{r^2x^2}{4}\right)^q$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\Gamma\left(-q\right)}{\Gamma\left(q+1\right)}dq\left(r^2\right)^q\lim_{M\to\infty}\int_0^M\left(\frac{x^2}{4}\right)^{p+q}d\left(\frac{x^2}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\Gamma\left(-q\right)}{\Gamma\left(q+1\right)}dq\left(r^2\right)^q\frac{2}{p+q+1}\lim_{M\to\infty}M^{p+q+1}.$$

被積分関数は $q=-p-1$ に極をもつ。ゆえに

$$A=\frac{2\Gamma\left(p+1\right)}{\Gamma\left(-p\right)}\left(r^2\right)^{-p-1}.$$

※ 足利大学名誉教授

原稿受付日　令和2年1月1日