3 次元電磁カスケード理論
A 近似エネルギー流ラテラル分布関数の計算
Ⅳ. エネルギー流ラテラル分布関数の計算

新 居 誠 彦※

A Calculation of Energy-flow Lateral Distribution Function under Approximation A

in Three Dimensional Electron-Photon Cascade Theory.

Ⅳ. Calculation of Lateral Distribution Function for Electron Energy-flow.

NII　Nobuhiko

Abstract

We calculate the energy-flow lateral distribution function under Approximation A in the three-dimensional cascade theory, and calculate lateral distribution function of average energy for a single electron. .

Keywords *: three-dimensional cascade theory,, energy-flow lateral distribution function, average energy lateral distribution, cascade theory under Approximation A.*

1. はじめに

本稿でエネルギー流積分スペクトルを計算する。$\pi_2\left(E_0,E,r,t\right)dt2\pi rdrdE$ は，縦方向に $\left(t,t+dt\right)$ の薄い厚みをもち，横方向へ半径が $\left(r,r+dr\right)$ の狭いリング状面積をもつ小さな環状の体積内で $\left(E,E+dE\right)$ のエネルギーをもつ電子数を表す。これらの電子が担うエネルギーの流量は $E\pi_2\left(E_0,E,r,t\right)dt2\pi rdrdE$ である。閾値が E のエネルギー流量（積分エネルギー流あるいはエネルギー流積分スペクトル）[1)] は,

$$\Pi_E\left(E_0,E,r,t\right)=\int_E^{E_0}E\,\pi_2\left(E_0,E,r,t\right)dE.. \tag{1.1}$$

2. エネルギー流積分スペクトル

2.1. 積分スペクトル

エネルギー流積分スペクトルを計算する。第Ⅲ稿§3.1 で得たように電子数ラテラル分布微分スペクトルは,

$$\pi_2\left(E_0,E,r,t\right)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{ds}{E}H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times 2\left(\frac{E}{E_s}\right)^2\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i\left(s\right)}{\alpha_i\left(s\right)}\mathrm{e}^{-\frac{E^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}}. \tag{2.1}$$

よって，

$$\Pi_E\left(E_0,E,r,t\right)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c E_0{}^s ds H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times\frac{2}{E_s{}^2}\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i\left(s\right)}{\alpha_i\left(s\right)}\int_E^{E_0} E^{-s+2}\,\mathrm{e}^{-\frac{E^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}}\,dE.$$

然るに，

$$\int_E^{E_0} E^{-s+2}\,\mathrm{e}^{-\frac{E^2r^2}{\alpha_i(s)E_s{}^2}}\,dE=\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{\alpha_i\left(s\right)E_s{}^2}\right)^{s/2-3/2}$$

$$\times\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{E^2r^2}{\alpha_i\left(s\right)E_s{}^2}\right)$$

$$-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{E_0{}^2r^2}{\alpha_i\left(s\right)E_s{}^2}\right)\},\qquad(2.2)$$

ここに，$\Gamma\left(a,x\right)=\int_x^\infty t^{a-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ は第 2 種不完全ガンマ関数。[2]　よって，

$$\Pi_E\left(E_0,E,r,t\right)=\frac{E_s}{4\pi^2 i}\int_c\left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^s\frac{ds}{r^3}$$

$$\times H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i\left(s\right)}{\alpha_i\left(s\right)^{s/2-1/2}}$$

$$\times\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{1}{\alpha_i\left(s\right)}\left(\frac{Er}{E_s}\right)^2\right)$$

$$-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{1}{\alpha_i\left(s\right)}\left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^2\right)\}.\qquad(2.3)$$

$C_i\left(s\right),\alpha_i\left(s\right)\left(i=1,\cdots,M(=4)\right)$（$s=0.25\sim3$）の値は第Ⅲ稿補遺Ⅱに与えられている。

2.2. エネルギー流積分スペクトルの体積

エネルギー流積分スペクトルの体積積分はエネルギー流遷移曲線積分スペクトルを与えるはずである。それを確認する。(2.3)の体積を V とする。

$$V=\int_0^\infty \Pi_E\left(E_0,E,r,t\right)2\pi r dr$$

$$=\frac{E_s}{2\pi i}\int_c\left(\frac{E_0}{E_s}\right)^s ds\, H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i\left(s\right)}{\alpha_i\left(s\right)^{s/2-1/2}}$$

$$\times\int_0^\infty r^{s-3}\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{1}{\alpha_i\left(s\right)}\left(\frac{Er}{E_s}\right)^2\right)$$

$$-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{1}{\alpha_i\left(s\right)}\left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^2\right)\}rdr.$$

積分の第 1 項＝

$$=\int_0^\infty r^{s-3}\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{1}{\alpha_i\left(s\right)}\left(\frac{Er}{E_s}\right)^2\right)rdr$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{E_s}{E}\right)^{s-1}\alpha_i\left(s\right)^{s/2-1/2}$$

$$\times\int_0^\infty u^{s/2-3/2}\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},u\right)du$$

$$=\left(\frac{E_s}{E}\right)^{s-1}\frac{\alpha_i\left(s\right)^{s/2-1/2}}{s-1}.$$

ここで $\int_0^\infty x^\mu\Gamma\left(\nu,x\right)dx=\dfrac{\left(\mu+\nu\right)!}{\mu+1}$ を用いた。[3]

第 2 項＝

$$=\int_0^\infty r^{s-3}\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{1}{\alpha_i\left(s\right)}\left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^2\right)rdr$$

$$=\left(\frac{E_s}{E_0}\right)^{s-1}\frac{\alpha_i\left(s\right)^{s/2-1/2}}{s-1}.$$

よって，

$$V=\frac{E_0}{2\pi i}\int_c\left\{\left(\frac{E_0}{E}\right)^{s-1}-1\right\}\frac{ds}{s-1}H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}.\qquad(2.4)$$

ここで 恒等式$\sum_{i=1}^{M}C_i\left(s\right)=1$（第Ⅲ稿 補遺Ⅰ(A13)）を用いた。

他方，1 次元の電子数微分スペクトルは主要項近似のもとで，

$$\pi_2\left(E_0,E,t\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{ds}{E}H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}.$$

よって，

$$\Pi_E\left(E_0,E,t\right)=\int_E^{E_0} E\pi_2\left(E_0,E,t\right)dE$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c E_0{}^s ds H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\int_E^{E_0} E^{-s}dE$$

$$=\frac{E_0}{2\pi i}\int_c\left\{\left(\frac{E_0}{E}\right)^{s-1}-1\right\}\frac{ds}{s-1}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}. \qquad (2.5)$$

(2.4), (2.5)から，3 次元エネルギー流積分スペクトルの体積積分はエネルギー流遷移曲線の積分スペクトルを正しく与えていることが確認される。

3. 鞍点法

鞍点法 [1),3)] を用いて(2.3)の s -積分を実行する。

$$\mathfrak{M}_E(E_0,E,r,s)=\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2-1/2}}$$

$$\times\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{1}{\alpha_i(s)}\left(\frac{Er}{E_s}\right)^2\right)$$

$$-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{1}{\alpha_i(s)}\left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^2\right), \qquad (3.1)$$

と表し，かつ，下記の $g(s)$ を用いて

$$\Pi_E(E_0,E,r,t)/E_s=\frac{1}{r^3}\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c \mathrm{e}^{g(s)}\,ds$$

と表す。

$$g(s)=s\ln\left(\frac{E_0}{E}\right)+s\ln\left(\frac{Er}{E_s}\right)+\ln H_1(s)$$

$$+\lambda_1(s)t+\ln\mathfrak{M}_E(E_0,E,r,s).$$

鞍点は次の $g'(s)$ を 0 とおいたときの解である。

$$g'(s)=\frac{dg(s)}{ds}=\ln\left(\frac{E_0}{E}\right)+\ln\left(\frac{Er}{E_s}\right)$$

$$+\lambda_1'(s)t+\mathfrak{M}_E'(E_0,E,r,s)/\mathfrak{M}_E(E_0,E,r,s).$$

$H_1(s)$ は s に対する変化が他の量に比べて緩く，カスケード理論でよく用いられる近似，$H_1'(s)\approx 0$ をここでも採用する。[3)]

鞍点を s_2 とし鞍点のまわりで $g(s)$ を展開する：

$$g(s)=g(s_2)+\frac{1}{2}g''(s_2)(s-s_2)^2.$$

積分路は鞍点を通り虚軸に平行な直線 [3)] である。このとき $s=s_2+i\sigma$ と表される。

$$\Pi_E(E_0,E,r,t)/E_s$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{g(s_2)}}{r^3}\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}g''(s_2)\sigma^2}d\sigma=\frac{\mathrm{e}^{g(s_2)}}{4\pi^2 r^3}\sqrt{\frac{2\pi}{g''(s_2)}}.$$

すなわち，

$$\Pi_E(E_0,E,r,t)=E_s\left(\frac{E}{E_s}\right)^3\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\left(\frac{Er}{E_s}\right)^{s-3}$$

$$\times\frac{H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\,\mathfrak{M}_E(E_0,E,r,s)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\lambda_1''(s)t+(\mathfrak{M}_E'/\mathfrak{M}_E)'}}\Bigg|_{s=s_2}. \qquad (3.2)$$

ここで $\mathfrak{M}_E'/\mathfrak{M}_E, (\mathfrak{M}_E'/\mathfrak{M}_E)'$ の数値計算は次のように実行した：

$\ln\mathfrak{M}_E=\sum_{k=0}^{N}c_k s^k$ （$N=6$）と近似し，

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M}_E'/\mathfrak{M}_E&=\sum_{k=1}^{N}kc_k s^{k-1},\\(\mathfrak{M}_E'/\mathfrak{M}_E)'&=\sum_{k=2}^{N}k(k-1)c_k s^{k-2}.\end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

4. 単位電子の平均エネルギー･ラテラル分布

中心から距離 $(r,r+dr)$ の細いリング状の面積内のエネルギー量 $\Pi_E(r)2\pi r dr$ をその面積内に存在する電子数 $\Pi_2(r)2\pi r dr$ で除した量は電子 1 個あたりの平均エネルギーである。[1)]

これを $e_E(E_0,E,r,t)$ と表すことにする。

(注) (2.5)で $s\to s+1$ とし $\Pi_E(E_0,E,t)=\frac{E_0}{2\pi i}\int_c\left\{(E_0/E)^s-1\right\}\frac{ds}{s}H_1(s+1)\mathrm{e}^{\lambda_1(s+1)t}$ と表すことができる。

$$e_E(E_0,E,r,t)=\frac{\Pi_E(E_0,E,r,t)}{\Pi_2(E_0,E,r,t)}. \tag{4.1}$$

第Ⅲ稿§3.2 でみたように電子数のラテラル分布積分スペクトルは,

$$\Pi_2(E_0,E,r,t)=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\left(\frac{Er}{E_s}\right)^{s-2}ds$$

$$\times H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\left(\frac{E}{E_s}\right)^2\mathfrak{M}_2(E_0,E,r,s), \tag{4.2.1}$$

$$\mathfrak{M}_2(E_0,E,r,s)=\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}}$$

$$\times\left\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{1}{\alpha_i(s)}\left(\frac{Er}{E_s}\right)^2\right)\right.$$

$$\left.-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{1}{\alpha_i(s)}\left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^2\right)\right\}. \tag{4.2.2}$$

よって,

$$e_E(E_0,E,r,t)$$

$$=\frac{E\int_c\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\left(\frac{Er}{E_s}\right)^{s-3}dsH_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\,\mathfrak{M}_E}{\int_c\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\left(\frac{Er}{E_s}\right)^{s-2}dsH_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\,\mathfrak{M}_2}. \tag{4.3}$$

電子数，エネルギー流の鞍点 s_1, s_2 を用いると,

$$e_E(E_0,E,r,t)/E$$

$$=\frac{\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\left(\frac{Er}{E_s}\right)^{s-3}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\,\mathfrak{M}_E\big|_{s=s_2}}{\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\left(\frac{Er}{E_s}\right)^{s-2}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\,\mathfrak{M}_2\big|_{s=s_1}}$$

$$\times\sqrt{\frac{\lambda_1''(s)t+(\mathfrak{M}_2'/\mathfrak{M}_2)'\big|_{s=s_1}}{\lambda_1''(s)t+(\mathfrak{M}_E'/\mathfrak{M}_E)'\big|_{s=s_2}}}. \tag{4.4}$$

5. グラフ化

$\Pi_E(E_0,E,r,t)$: (3.2), や $e_E(E_0,E,r,t)/E$: (4.4), のグラフは第Ⅵ稿に示す。

6. モーメントの計算とその意義

6.1. モーメントの計算

$2n$ 次のモーメントは次式で定義される。

$$\left\langle r^{2n}{}_E\right\rangle=\frac{\int_0^\infty r^{2n}\Pi_E(E_0,E,r,t)2\pi rdr}{\int_0^\infty \Pi_E(E_0,E,r,t)2\pi rdr}. \tag{6.1}$$

または，体積で規格化した表式

$\int_0^\infty \tilde{\Pi}_E(E_0,E,r,t)2\pi rdr=1$ を用いて

$$\left\langle r^{2n}{}_E\right\rangle=\int_0^\infty r^{2n}\tilde{\Pi}_E(E_0,E,r,t)2\pi rdr. \tag{6.2}$$

ここで対象にする深さは $t>2$ にとることとする。このとき $\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}\ll\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$ が成り立つので，$\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$ を含む項のみが採用できる（主要項近似)。

$$\left\langle r^{2n}{}_E\right\rangle=\int_0^\infty r^{2n}\tilde{\Pi}_E(E_0,E,r,t)2\pi rdr$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c\left(\frac{E_0}{E_s}\right)^s dsH_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2-1/2}}$$

$$\times\int_0^\infty r^{2n+s-3}\left\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{E^2r^2}{E_s{}^2\alpha_i(s)}\right)\right.$$

$$\left.-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{E_0{}^2r^2}{E_s{}^2\alpha_i(s)}\right)\right\}rdr.$$

r に関する積分は

$\int_0^\infty x^\mu\Gamma(\nu,x)dx=\frac{(\mu+\nu)!}{\mu+1}$ を用いて，[2]

$$\int_0^\infty r^{2n+s-3}\Gamma\left(-\frac{s}{2}+\frac{3}{2},\frac{E^2r^2}{E_s{}^2\alpha_i(s)}\right)rdr$$

$$=\frac{n!}{2n+s-1}\left(\frac{E_s{}^2\alpha_i(s)}{E^2}\right)^{n+s/2-1/2}.$$

よって,

$$\left\langle r^{2n}{}_E\right\rangle=$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\left(\frac{E_0}{E_s}\right)^s dsH_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\sum_{i=1}^{M}C_i(s)\alpha_i(s)^n$$

$$\times\frac{n!}{2n+s-1}\left\{\left(\frac{E_s{}^2}{E^2}\right)^{n+s/2-1/2}-\left(\frac{E_s{}^2}{E_0{}^2}\right)^{n+s/2-1/2}\right\}.$$

ここで Prony 内挿法（第Ⅲ稿　補遺Ⅰ）の関係式:

$$\sum_{i=1}^{M} C_i(s)\alpha_i(s)^n = n!\rho_n(s) \tag{6.3}$$

を用いると，

$$\frac{\langle r^{2n}{}_E\rangle}{n!^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_c E_0{}^s ds H_1(s) \mathrm{e}^{\lambda_1(s)t} \frac{\rho_n(s) E_s{}^{2n}}{s+2n-1}$$

$$\times\left(\frac{1}{E^{s+2n-1}} - \frac{1}{E_0{}^{s+2n-1}}\right). \tag{6.4}$$

2 次のモーメントはエネルギー流ラテラル分布の拡がりの目安$\sqrt{\langle r^2{}_E\rangle}$を与える：

$$\sqrt{\langle r^2{}_E\rangle} \propto \left(\frac{1}{E^{s+1}} - \frac{1}{E_0{}^{s+1}}\right)^{1/2}. \tag{6.5}$$

E→大で $\sqrt{\langle r^2{}_E\rangle}$ →小。すなわち高エネルギー電子ほど中心に集中する。さらに，入射電子は拡がりをもたないので当然のことであるが，$E=E_0$ で $\sqrt{\langle r^2{}_E\rangle}=0$ が確認される。

6.2. モーメントの意義

モーメントの計算にはもう一つの意義がある。(6.4)において，

$$\frac{1}{s+2n-1}\left(\frac{1}{E^{s+2n-1}} - \frac{1}{E_0{}^{s+2n-1}}\right)$$

$$= \int_E^{E_0} E^{-s-2n} dE$$ であるから，

$$\frac{1}{n!^2}\langle r^{2n}{}_E\rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_E^{E_0} dE \int_c \left(\frac{E_0}{E}\right)^s ds H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\left(\frac{E_s}{E}\right)^{2n}\rho_n(s). \tag{6.6}$$

(6.6)の両辺に$\left(-x^2/4\right)^n$を乗じて n の和をとる。これを A とする。2 つの表現が可能である。

(1) 一つは，

$$A = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!^2}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n \langle r^{2n}{}_E\rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_E^{E_0} dE \int_c \left(\frac{E_0}{E}\right)^s ds H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{E_s{}^2 x^2}{4E^2}\right)^n \rho_n(s).$$

然るに第Ⅲ稿(1.2)から

$$\frac{1}{8\pi^3 i}\int_c \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{ds}{E}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{E_s{}^2 x^2}{4E^2}\right)^n \phi_n(s,t)$$

$$= f(E_0, E, x, t).$$

ここでは主要項近似を用いているから

$\phi_n(s,t) = H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\rho_n(s)$. よって，

$$A = (2\pi)^2\int_E^{E_0} E f(E_0, E, x, t) dE. \tag{6.7}$$

(2) 二つ目は$\langle r^{2n}{}_E\rangle$に定義式(6.2)を適用する。

$$A = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!^2}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n \int_0^\infty r^{2n}\tilde{\Pi}_E(E_0, E, r, t) 2\pi r dr.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(-\frac{r^2 x^2}{4}\right)^n = J_0(rx)$$ だから

$$A = \int_0^\infty J_0(rx)\tilde{\Pi}_E(E_0, E, r, t) 2\pi r dr.$$

ところが

$$\tilde{\Pi}_E(E_0, E, r, t) = \int_E^{E_0} E\pi_2(E_0, E, r, t) dE,$$

$$\pi_2(E_0, E, r, t) = \int_0^\infty J_0(rx) f(E_0, E, x, t) 2\pi x dx.$$

よって，

$$A = (2\pi)^2\int_0^\infty J_0(rx) r dr \int_E^{E_0} E dE$$

$$\times \int_0^\infty J_0(rx) f(E_0, E, x, t) x dx. \tag{6.8}$$

(6.7)，(6.8)から次式が成り立つ。

$$\int_0^\infty J_0(rx) r dr \int_0^\infty J_0(rx) x dx \int_E^{E_0} E f(E_0, E, x, t) dE$$

$$= \int_E^{E_0} E f(E_0, E, x, t) dE. \tag{6.9}$$

すなわち関数$\int_E^{E_0} E f(E_0, E, x, t) dE$ に対してハンケル変換の相反関係：[3)]

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty a(x)J_0(xy)xdx = b(y),\\ \int_0^\infty b(y)J_0(xy)ydy = a(x)\end{aligned}\right\} \qquad (6.10)$$

の成り立つことが確認できる。相反関係の成立は $\Pi_E(E_0, E, r, t)$ が正しく計算されていることを示す。つまりモーメント $\langle r^{2n}{}_E \rangle$ を計算するもう一つの意義は「計算の成否」を判定する手段を提供することにある。

参考文献

1) J.Nishimura, Handbuch der Physik , **XLVI/2**(1967),1.

2) 森口繁一，宇田川銈久，一松 信，数学公式Ⅲ（特殊函数）（岩波全書，1965）.

3) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松 信, 数学公式Ⅱ, §60（岩波全書，1965）.

※　足利大学名誉教授

原稿受付日　令和2年1月1日