3 次元電磁カスケード理論
A 近似エネルギー流ラテラル分布関数の計算
Ⅲ. 電子数ラテラル分布関数の計算

新 居 誠 彦

A Calculation of Energy-flow Lateral Distribution Function under Approximation A

in Three Dimensional Electron-Photon Cascade Theory.

Ⅲ. Calculation of lateral distribution function for electron number.

NII Nobuhiko

Abstract

We calculate the electron-number lateral distribution function, under Approximation A in the three-dimensional cascade theory. Which is used for calculation of electron mean energy lateral distribution.

Keywords *: three-dimensional cascade theory, lateral distribution function, Approximation A.*

.

1．はじめに

第 I 稿で 3 次元 A 近似拡散方程式の行列表示による無限級数解を得た。電子数・光子数のラテラル分布関数は，その級数をハンケル変換して得られる。ここで入射電子の創る電子成分$(\mathrm{e}\to\mathrm{e})$を対象にする。行列の第(1,1)成分を採用して，

$$\pi_2(E_0,E,r,t) = \int_0^\infty f(E_0,E,x,t)\, J_0(rx) 2\pi x dx, \qquad (1.1)$$

$$f(E_0,E,x,t) = \frac{1}{8\pi^3 i}\int_c \left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{ds}{E} \sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{{E_s}^2 x^2}{4E^2}\right)^m \phi_m(s,t). \qquad (1.2)$$

本稿で(1.2)の和を求めハンケル変換(1.1)を実行して，微分および積分スペクトルを求める。

2．無限級数和の計算

(1.2)の$\phi_m(s,t)$が，主要項近似（$\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t} \gg \mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}$ が満たされる場合，t>2 なら十分である）のもとで，次の形で表されることを第Ⅱ稿でみた。

$$\phi_m(s,t) = \rho_m(s) H_1(s)\, \mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}. \qquad (2.1)$$

$\rho_m(s)$は漸化式（第Ⅱ稿(2.1.1)）から計算できる。このとき(1.2)の級数和は

$H_1(s)\,\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{{E_s}^2 x^2}{4E^2}\right)^m \rho_m(s)$ と表される。

ここで

$$S=\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\right)^m\rho_m\left(s\right) \tag{2.2}$$

とおく。

2.1. Dirichlet 級数と Prony 内挿法

ベキ級数の一般化とみなされる級数；Dirichlet 級数 1) によって S は,

$$S=\sum_{i=1}^{M}C_i\left(s\right)\mathrm{e}^{-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\alpha_i\left(s\right)} \tag{2.3}$$

と表すことができる。

(2.3)の指数関数を展開して(2.2)のベキと比較すれば次式を得る。

$$C_i\left(s\right)\alpha_i\left(s\right)^m=m!\rho_m\left(s\right). \tag{2.4}$$

他方(2.2)を次のように表す。

$$S=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\right)^m\cdot m!\rho_m\left(s\right). \tag{2.5}$$

Prony 内挿法 2) を用いて，$m!\rho_m\left(s\right)$ を

$$m!\rho_m\left(s\right)=\sum_{i=1}^{M}C_i\left(s\right)\alpha_i\left(s\right)^m. \tag{2.6}$$

と表すと，和は Dirichlet 級数に帰着する。

$$S=\sum_{i=1}^{M}C_i\left(s\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\alpha_i\left(s\right)\right)^m$$

$$=\sum_{i=1}^{N}C_i\left(s\right)\mathrm{e}^{-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\alpha_i\left(s\right)}. \tag{2.7}$$

つまり Dirichlet 級数を用いる方法と
Prony 内挿法を用いる方法とは同値である。

2.2. 未知数 $C_i\left(s\right)$, $\alpha_i\left(s\right)$ の決定

$2M$ 個の未知数 $C_i\left(s\right)$, $\alpha_i\left(s\right)$ $\left(i=1,2,\cdots,M\right)$ は

$2M$ 個の既知数 $m!\rho_m\left(s\right)$ ($m=0,1,\cdots,\ 2M-1$) から一意的に定まる（補遺Ⅰ）。

2.3. $f\left(E_0,E,x,t\right)$ の表示

以上から(1.2)は次のように表される。

$$f\left(E_0,E,x,t\right)$$

$$=\frac{1}{8\pi^3 i}\int_c\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{ds}{E}H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times\sum_{i=1}^{M}C_i\left(s\right)\mathrm{e}^{-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\alpha_i\left(s\right)}. \tag{2.8}$$

3. 電子数ラテラル分布関数

3.1. 微分スペクトル

(2.8)のハンケル変換から π_2 が得られる。

$$\pi_2\left(E_0,E,r,t\right)$$

$$=\int_0^\infty f\left(E_0,E,x,t\right)J_0\left(rx\right)2\pi x dx$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{ds}{E}H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times 2\left(\frac{E}{E_s}\right)^2\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i\left(s\right)}{\alpha_i\left(s\right)}\mathrm{e}^{-\frac{E^2r^2}{E_s{}^2\alpha_i\left(s\right)}}. \tag{3.1}$$

ここで $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax^2}J_0\left(rx\right)xdx=\mathrm{e}^{-r^2/4a}\big/2a$ 3)

を用いた。

3.2. 積分スペクトル

(3.1)をエネルギーで積分する。

$$\Pi_2\left(E_0,E,r,t\right)=\int_E^{E_0}\pi_2\left(E_0,E,r,t\right)dE$$

$$=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c\left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^s\frac{ds}{r^2}H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i\left(s\right)}{\alpha_i\left(s\right)^{s/2}}\left\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{1}{\alpha_i\left(s\right)}\left(\frac{Er}{E_s}\right)^2\right)\right.$$

$$\left.-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{1}{\alpha_i\left(s\right)}\left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^2\right)\right\}. \tag{3.2}$$

ここに,

$$\Gamma\left(\nu,x\right)=\int_x^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{a-1}dt \tag{3.3}$$

は第 2 種不完全ガンマ関数 3) である。

3.3. 積分スペクトルの体積積分

積分スペクトルの体積積分は A 近似の遷移曲線の積分スペクトルを与えなければならない。それを確認する。

$$\int_0^\infty \Pi_2\left(E_0,E,r,t\right)2\pi r dr$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \left(\frac{E_0}{E_s}\right)^s ds H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i\left(s\right)}{\alpha_i\left(s\right)^{s/2}}$$

$$\times\int_0^\infty r^{s-2}\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{1}{\alpha_i\left(s\right)}\left(\frac{Er}{E_s}\right)^2\right)$$

$$-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{1}{\alpha_i\left(s\right)}\left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^2\right)\}rdr.$$

r に関する積分の第 1 項を A とおく：

$$A=\int_0^\infty r^{s-2}\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{1}{\alpha_i\left(s\right)}\left(\frac{Er}{E_s}\right)^2\right)rdr$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_i\left(s\right)E_s{}^2}{E^2}\right)^{s/2}\int_0^\infty x^{s/2-1}\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,x\right)dx.$$

然るに

$\int_0^\infty x^\mu \Gamma\left(\nu,x\right)dx=\dfrac{\Gamma\left(\mu+\nu+1\right)}{\mu+1}$ [3] だから

$$A=\frac{\alpha_i\left(s\right)^{s/2}}{s}\left(\frac{E_s}{E}\right)^s.$$

よって，

$$\int_0^\infty \Pi_2\left(E_0,E,r,t\right)2\pi r dr$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \left\{\left(\frac{E_0}{E}\right)^s-1\right\}\frac{ds}{s}H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\sum_{i=1}^{M}C_i\left(s\right).$$

補遺 I (A13)より $\sum_{i=1}^{M}C_i\left(s\right)=1$．ゆえに，

$$\int_0^\infty \Pi_2\left(E_0,E,r,t\right)2\pi r dr$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \left\{\left(\frac{E_0}{E}\right)^s-1\right\}\frac{ds}{s}H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}. \tag{3.6}$$

他方，遷移曲線の積分スペクトル [4] は，

$$\Pi\left(E_0,E,t\right)=\int_E^{E_0}\pi\left(E_0,E,t\right)dE,$$

$$\pi\left(E_0,E,t\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_c \left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{ds}{E}H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$

より

$$\Pi\left(E_0,E,t\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \left\{\left(\frac{E_0}{E}\right)^s-1\right\}\frac{ds}{s}H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}. \tag{3.7}$$

(3.6),(3.7)より，ラテラル分布積分スペクトルの体積積分は遷移曲線の積分スペクトルに帰着することが確認される。※)

4.　鞍点法

(3.2)の s -積分は鞍点法を用いて実行できる。[4]

$$\frac{\Pi_2\left(E_0,E,r,t\right)}{\left(E/E_s\right)^2}=\frac{1}{4\pi^2 i}\int_c \left(\frac{E_0}{E}\right)^s ds H_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times\left(\frac{Er}{E_s}\right)^{s-2}\mathfrak{M}_2\left(E_0,E,r,s\right), \tag{4.1}$$

$$\mathfrak{M}_2\left(E_0,E,r,s\right)=\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i\left(s\right)}{\alpha_i\left(s\right)^{s/2}}$$

$$\times\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{1}{\alpha_i\left(s\right)}\left(\frac{Er}{E_s}\right)^2\right)$$

$$-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{1}{\alpha_i\left(s\right)}\left(\frac{E_0 r}{E_s}\right)^2\right)\}. \tag{4.2}$$

とおく。(4.1)の被積分関数を指数関数で表し，

(4.1)の右辺 $=\dfrac{1}{4\pi^2 i}\int_c \mathrm{e}^{f(s)}ds$ とおく。

$$f\left(s\right)=s\ln\frac{E_0}{E}+\lambda_1\left(s\right)t+\ln H_1\left(s\right)$$

$$+\left(s-2\right)\ln\frac{Er}{E_s}+\ln\mathfrak{M}_2\left(E_0,E,r,s\right). \tag{4.3}$$

鞍点 s_1 は次式の解である。

$$f'\left(s\right)=\frac{df\left(s\right)}{ds}=\ln\frac{E_0}{E}+\lambda_1'\left(s\right)t+$$

※)　$t=0$ における電子数の微分・積分スペクトルの振る舞いを補遺Ⅱで考察する。

$$+\ln\frac{Er}{E_s}+\frac{\mathfrak{M}_2'}{\mathfrak{M}_2}=0. \tag{4.4}$$

$H_1(s)$の変化は他の量に比べて緩いのでカスケード理論でよく使われる近似$H_1'(s)\approx 0$をここでも採用する。

$f(s)=f(s_1)+1/2\cdot f''(s_1)(s-s_1)^2$と展開し積分路$c$は鞍点を通り虚軸に平行にとる。

$s=s_1+i\sigma\ (-\infty<\sigma<\infty)$．(4.1)は,

$$\frac{\Pi_2(E_0,E,r,t)}{(E/E_s)^2}=\mathrm{e}^{f(s_1)}\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-1/2\cdot f''(s_1)\sigma^2}d\sigma.$$

σの積分は$\sqrt{\dfrac{2\pi}{f''(s_1)}}$.　よって,

$$\frac{\Pi_2(E_0,E,r,t)}{(E/E_s)^2}=\frac{\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\left(\frac{Er}{E_s}\right)^{s-2}H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\mathfrak{M}_2(E_0,E,r,s)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{\lambda_1''(s)t+(\mathfrak{M}_2'/\mathfrak{M}_2)'}}\Bigg|_{s=s_1}. \tag{4.5}$$

$$\mathfrak{M}_2(E_0,E,r,s)=\sum_{i=1}^{M}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^{s/2}}\times$$
$$\times\left\{\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{1}{\alpha_i(s)}\left(\frac{Er}{E_s}\right)^2\right)\right.$$
$$\left.-\Gamma\left(-\frac{s}{2}+1,\frac{1}{\alpha_i(s)}\left(\frac{E_0r}{E_s}\right)^2\right)\right\}. \tag{4.6}$$

(4.4),(4.5)における$\mathfrak{M}_2$の微分は次のように計算した。(4.2)の対数，$\ln\mathfrak{M}_2$をsの多項式で近似し,

$$\ln\mathfrak{M}_2=\sum_{k=0}^{K}c_ks^k\ \ (K=6), \tag{4.7}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M}_2'/\mathfrak{M}_2&=\sum_{k=1}^{K}kc_ks^{k-1},\\ (\mathfrak{M}_2'/\mathfrak{M}_2)'&=\sum_{k=2}^{K}k(k-1)c_ks^{k-2}.\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

5.　$\Pi_2(E_0,E,r,t)$の利用と，グラフ化

$\Pi_2(E_0,E,r,t)$は単位電子の平均エネルギーラテラル分布の計算に用いる（第Ⅳ稿）。
(4.5)のグラフは第Ⅵ稿に示す。

参考文献

1) 森口繁一，宇田川銈久，一松 信，数学公式Ⅱ（岩波全書，1965）.
2) 日高孝次，数値積分法（岩波書店，1942）.
3) 森口,宇田川,一松，数学公式Ⅲ（岩波全書, 1994）.
4) B.Rossi and K.Greisen, Rev.Mod.Phys.13(1941),283.
5) 藤原松三郎，行列及び行列式（岩波全書, 1955）.

補遺Ⅰ．Prony 内挿法

　Prony 内挿法は補間法の一つである。
等間隔である$2M$個の値$x_0,x_1,\cdots,x_{2M-1}$に対する値$y_0,y_1,\cdots,y_{2M-1}$が既知であるとき，xに対する補間値$y(x)$を指数関数の和で求める方法が Prony の内挿法である。つまり Dirichlet 級数 1) で補間する。

$$y(x)=A_1\mathrm{e}^{a_1x}+A_2\mathrm{e}^{a_2x}+\cdots+A_M\mathrm{e}^{a_Mx}. \tag{A1}$$

Ⅰ-1. 未知数A_i,a_iの決定法

$2M$個の未知数A_i,a_i（$i=1,2,\cdots,M$）は$2M$個の既知数y_i（$i=0,1,\cdots,2M-1$）から以下のように決定できる。

$x_k\ (k=0,1,\cdots,M)$に対して

$$\sum_{i=1}^{M}A_i\mathrm{e}^{a_ix_k}=y_k \tag{A2}$$

である。$x_0,x_1,\cdots$の間隔をhとすれば
$x_k=x_0+kh$であるから

$A_i e^{a_i x_k} = A_i e^{a_i x_0} \cdot e^{a_i kh}$．　ここで

$$A_i e^{a_i x_0} = C_i, e^{a_i h} = \alpha_i \tag{A3}$$

と記せば(A2)は

$$\sum_{i=1}^{M} C_i \alpha_i^{\ k} = y_k. \tag{A4}$$

次の $M+1$ 個の式を考える。

$$\sum_{i=1}^{M} C_i \alpha_i^{k+j} = y_{k+j}.\ (j = 0, 1, \cdots, M) \tag{A5}$$

C_i を未知数とみれば M 個の未知数に対して連立方程式が $M+1$ 組となる。このとき解が存在する必要十分条件は次式が成り立つことである。[5)]

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{\ k} & \alpha_2^{\ k} & \cdots & \alpha_M^{\ k} & y_k \\ \alpha_1^{\ k+1} & \alpha_2^{\ k+1} & \cdots & \alpha_M^{\ k+1} & y_{k+1} \\ \alpha_1^{\ k+2} & \alpha_2^{\ k+2} & \cdots & \alpha_M^{\ k+2} & y_{k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{\ k+M} & \alpha_2^{\ k+M} & \cdots & \alpha_M^{\ k+M} & y_{k+M} \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

左辺を展開すると

$$\prod_{i<j}^{M} \left(\alpha_i - \alpha_j\right) P_M^{\ k} \sum_{i=0}^{M} P_{M-i}\, y_{k+i} = 0.$$

よって次式を得る。

$$\sum_{i=0}^{M} P_{M-i}\, y_{k+i} = 0, \tag{A6}$$

$$P_0 = 1,\quad P_1 = -\sum_{i=1}^{M} \alpha_i,\quad P_2 = \sum_{i<j}^{M} \alpha_i \alpha_j,$$

$$P_3 = -\sum_{i<j<k}^{M} \alpha_i \alpha_j \alpha_k,\ \cdots, P_M = (-1)^M \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_M. \tag{A7}$$

ところで P_i は多項式 $\prod_{i=1}^{M}\left(t-\alpha_i\right)$ の展開係数に等しい。すなわち

$$\prod_{i=1}^{M}\left(t-\alpha_i\right) = \sum_{i=0}^{M} P_i\, t^{M-i}. \tag{A8}$$

一方，(A5)を行列で表せば，

$$\begin{pmatrix} y_k & y_{k+1} & \cdots & y_{k+M-1} \\ y_{k+1} & y_{k+2} & \cdots & y_{k+M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k+M-1} & y_{k+M} & \cdots & y_{k+2M-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_M \\ P_{M-1} \\ \vdots \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{k+M} \\ y_{k+M+1} \\ \vdots \\ y_{k+2M-1} \end{pmatrix}.$$

よって

$$\begin{pmatrix} P_M \\ P_{M-1} \\ \vdots \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_k & y_{k+1} & \cdots & y_{k+M-1} \\ y_{k+1} & y_{k+2} & \cdots & y_{k+M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k+M-1} & y_{k+M} & \cdots & y_{k+2M-2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_{k+M} \\ y_{k+M+1} \\ \vdots \\ y_{k+2M-1} \end{pmatrix}. \tag{A9}$$

これらの P_i を用いてつくった M 次式：

$$\sum_{i=0}^{M} P_i t^{M-i} = 0 \tag{A10}$$

の数値解として α_i が決定される。

α_i を用いて C_i は次のように決定できる。

(A4)を行列で表せば

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_M \\ \alpha_1^{\ 2} & \alpha_2^{\ 2} & \alpha_3^{\ 2} & \cdots & \alpha_M^{\ 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{\ M-1} & \alpha_2^{\ M-1} & \alpha_3^{\ M-1} & \cdots & \alpha_M^{\ M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{M-1} \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_M \\ \alpha_1^{\ 2} & \alpha_2^{\ 2} & \alpha_3^{\ 2} & \cdots & \alpha_M^{\ 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{\ M-1} & \alpha_2^{\ M-1} & \alpha_3^{\ M-1} & \cdots & \alpha_M^{\ M-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{M-1} \end{pmatrix}. \tag{A11}$$

(A10)，(A11)で α_i, C_i が決定した。よって次の点が結論できる。

(1) (2.4)は，$y_m(s) = m!\rho_m(s)$ とおいたものであるから，

$$\sum_{i=1}^{M} C_i(s) \alpha_i(s)^m = m!\rho_m(s), \tag{A12}$$
$$(m = 0, 1, 2, \cdots, 2M-1).$$

とくに，

$$\sum_{i=1}^{M} C_i(s) = \rho_0(s) = 1. \tag{A13}$$

(2) A_i, a_i を求めるには(A3)に依ればよい。

(3) $x_0 \leqq x \leqq x_{2M-1}$ に対する補間値 $y(x)$ は

$$y(x)=\sum_{i=1}^{M} C_i \alpha_i^{\ x}.$$

補遺Ⅱ．　$C_i(s), \alpha_i(s)$ の数値結果

第Ⅱ稿§3 の $\rho_m(s)$（$m=0,1,\cdots,7$）を用いて，補遺Ｉの方法で求めた $C_i(s), \alpha_i(s)$（$M=4$）を表 1 に示す。

特徴的な点は,

(1) C_1=0.98～0.99 の値をもつが他の $C_2 \sim C_4$ の値は桁違いの変化で小さくなる,

(2) $\alpha_1 \sim \alpha_4$ は桁違いの変化で大きくなる。

$S=0.25$			
C_1	0.975885	α_1	0.031168
C_2	0.024041	α_2	0.939808
C_3	7.24E-05	α_3	5.839337
C_4	4.98E-09	α_4	31.84684
$S=0.5$			
C_1	0.976037	α_1	0.106802
C_2	0.023939	α_2	2.685042
C_3	2.37E-05	α_3	22.17494
C_4	2.91E-09	α_4	116.9778
$S=1$			
C_1	0.985813	α_1	0.520173
C_2	0.014168	α_2	14.64972
C_3	1.87E-05	α_3	125.1280
C_4	4.29E-09	α_4	581.1205
$S=1.5$			
C_1	0.987453	α_1	1.846727
C_2	0.012521	α_2	62.49010
C_3	2.63E-05	α_3	462.8740
C_4	6.85E-09	α_4	2082.085

表 1-1　$C_i(s)$ および $\alpha_i(s)$ の値

$S=2$			
C_1	0.983982	α_1	6.447458
C_2	0.015978	α_2	204.9494
C_3	4.01E-05	α_3	1429.136
C_4	1.13E-08	α_4	6310.539
$S=2.5$			
C_1	0.978615	α_1	21.40332
C_2	0.021324	α_2	571.4240
C_3	6.13E-05	α_3	3802.655
C_4	1.83E-08	α_4	16549.62
$S=3$			
C1	0.978795	α_1	78.28170
C2	0.021145	α_2	1148.669
C3	5.87E-05	α_3	7344.790
C4	1.63E-08	α_4	32179.41

表 1-2　$C_i(s)$ および $\alpha_i(s)$ の値

補遺Ⅲ．$t=0$ における電子数スペクトル

$\pi(E_0,E,0), \Pi(E_0,E,0)$ の振る舞い

遷移曲線積分スペクトルの，$t=0$ における表式：

$$\Pi(E_0,E,0)=\int_E^{E_0}\pi(E_0,E,0)\,dE$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c\left\{\left(\frac{E_0}{E}\right)^s-1\right\}\frac{ds}{s}$$

において著者は，積分路 c を原点 $s=0$ の周りの閉曲線にとって,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\left\{\left(\frac{E_0}{E}\right)^s-1\right\}\frac{ds}{s}=0$$

としたことが以前にあった【電磁カスケード理論 A 近似エネルギー流遷移曲線の計算Ⅰ, 足利工業大学研究集録 <u>**53**</u>，p23，2018.3】。しかし,そのとき, 積分路 c を閉曲線にとったことは誤りであった。メリン逆変換の積分路は虚軸に平行なのである（文献 4, p308）。

ここで積分路を正しくとり $\pi\left(E_0, E, 0\right)$ と

$\Pi\left(E_0, E, 0\right)$ を改めて計算する。

鞍点を s_0 とし積分路上で

$s = s_0 + i\sigma\ \left(-\infty < \sigma < \infty\right)$ とおく。

$$\pi\left(E_0, E, 0\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{E_0}{E}\right)^{s_0+i\sigma}\frac{d\left(i\sigma\right)}{E}$$

$$= \frac{1}{E}\left(\frac{E_0}{E}\right)^{s_0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\sigma\ln\left(E_0/E\right)}d\sigma.$$

$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ikx}\,dk = 2\pi\delta\left(x\right)$ であるから，

$$\pi\left(E_0, E, 0\right) = \frac{1}{E}\left(\frac{E_0}{E}\right)^{s_0}\delta\left(\ln\frac{E_0}{E}\right).$$

デルタ関数の公式；

$$\delta\left(f\left(x\right)\right) = \sum_i\frac{1}{\left|f'\left(a_i\right)\right|}\delta\left(x - a_i\right),\ f\left(a_i\right) = 0$$

から，

$$\delta\left(\ln\frac{E_0}{E}\right) = \frac{\delta\left(E - E_0\right)}{\left(d/dE\right)\ln E} = E\delta\left(E - E_0\right).$$

ゆえに，

$$\pi\left(E_0, E, 0\right) = \left(\frac{E_0}{E}\right)^{s_0}\delta\left(E - E_0\right)$$

$$= \delta\left(E - E_0\right). \qquad \text{(B1)}$$

(B1)は次の 2 点を示す：

(1) 入射電子がデルタ関数であることを微分スペクトルは正しく記述している。

(2) 積分結果は積分路の位置 s_0 に無関係である。

積分スペクトルは，

$$\Pi\left(E_0, E, 0\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty}\frac{ds}{s}\left\{\left(\frac{E_0}{E}\right)^s - 1\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{E}^{E_0}dE\int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty}\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{ds}{E}$$

$$= \int_{E}^{E_0}dE\,\delta\left(E - E_0\right) = 1$$

よって，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty}\frac{ds}{s}\left\{\left(\frac{E_0}{E}\right)^s - 1\right\} = 1. \qquad \text{(B2)}$$

$t = 0$ に電子が 1 個存在することを(B2)は示す。積分スペクトルは $t = 0$ の状況，すなわち電子の入射を正しく記述している。

※ 足利大学名誉教授

原稿受付日　令和2年1月1日