3 次元電磁カスケード理論 A 近似エネルギー流ラテラル分布関数の計算 Ⅱ. 漸化式の新しい計算－逐次 2 階微分法－

新 居 誠 彦※

A Calculation of Energy-flow Lateral Distribution Function under Approximation A in Three Dimensional Electron-Photon Cascade Theory.

Ⅱ. Another calculation for recurrence formula－successive second order differential－.

NII　Nobuhiko

Abstract

In calculation of lateral distribution function for the electron number or the energy-flow under Approximation A in the three-dimensional cascade theory, we propose an alternative method －successive second order differential－to calculate the recurrence formula proposed by J.Nishimura.

Keywords *: three-dimensional cascade theory, lateral distribution function, Approximation A, .*

recurrence formula, successive second order differential.

1.　はじめに

第Ⅰ稿で鈴木-Trotter 公式を用いて 3 次元 A 近似拡散方程式の解を得た。※) それを出発点として電子数・光子数の，(1)積分ラテラル分布関数，(2)エネルギー流のラテラル分布関数，(3)単位粒子あたりの平均エネルギーラテラル分布が得られる。それらの基礎となる電子・光子数のラテラル分布関数微分スペクトルは第Ⅰ稿で次式のように得た。

$$\begin{pmatrix} \pi_2\left(Z_0,E,r,t\right) \\ \gamma_2\left(Z_0,E,r,t\right) \end{pmatrix} = \int_0^\infty \begin{pmatrix} f\left(Z_0,E,x,t\right) \\ g\left(Z_0,E,x,t\right) \end{pmatrix} J_0(rx)2\pi x dx,$$

$$\begin{pmatrix} f\left(Z_0,E,x,t\right) \\ g\left(Z_0,E,x,t\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{8\pi^3 i}\int_c \frac{ds}{E^{s+1}} \times \sum_{m=0}^\infty \left(-\frac{E_s{}^2 x^2}{4E^2}\right)^m \phi_m(s,t) \begin{pmatrix} E_0{}^s \\ W_0{}^s \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

$$\phi_m(s,t) = \lim_{(\xi-t)\to 0} \Phi_m(s,\xi-t,t),$$

※) われわれの電子光子 2 成分の解は西村の解を含む。

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_m(s,\xi-t,t)\\&=\int_0^t\phi_0(s+2m,t-t')(\xi-t')^2\,dt'\\&\times Q_0\Phi_{m-1}(s,\xi-t',t').\\&\Phi_0(s,\xi-t,t)=\phi_0(s,t)=\mathrm{e}^{P(s)t},\end{aligned}\right\}\quad(1.2)$$

$$P(s)=\begin{pmatrix}-A(s) & B(s)\\ C(s) & -\sigma_0\end{pmatrix},Q_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

本稿で漸化式(1.2)の新しい計算法を示す。

2．漸化式の計算

2.1. スカラー表示

第 I 稿および本稿§1 までは行列表示を採っている。すなわち(1.1)は電子成分と光子成分を併記した表示である。西村の計算は入射電子（入射エネルギー E_0）の創る電子成分 $(\mathrm{e}\to\mathrm{e})$ を対象にする。よってここでは西村にしたがって $\mathrm{e}\to\mathrm{e}$ を計算する。この場合，行列表示の第(1,1)成分を採用すればよい。漸化式(1.2)は次のように表される。$\Phi_m(s,\xi-t,t)$, $\phi_m(s,t)$ はスカラーである。

$$\begin{aligned}&\Phi_m(s,\xi-t,t)\\&=\int_0^t\phi_0(s+2m,t-t')(\xi-t')^2\\&\times\Phi_{m-1}(s,\xi-t',t')dt',\end{aligned}\qquad(2.1.1)$$

$$\begin{aligned}&\Phi_0(s,\xi-t,t)=\phi_0(s,t)\\&=H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}+H_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}.\end{aligned}\qquad(2.1.2)$$

$\Phi_m(s,\xi-t,t)$ の計算について，西村はラプラス変換による計算方法を示した。しかしこの方法は次数とともに項数が増大し計算が極めて煩雑になる。実用的とはいい難い。それに代わって著者は見通しのよい行列表示を考案した。[1]　次数とともに増えていく項のうち主要な項，すなわち $\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$ を含む項のみを採用していく計算である（ここでは主要項近似と呼ぶ。補遺 I）。項数の増大が抑えられ煩雑さが軽減される。さらに規則性が見える。実用的である。

著者はその後，主要項近似のもとで漸化式(2.1.1)が逐次 2 階微分という簡単な計算によって得られることに気づいた。計算のイメージが描きやすく数値計算が簡単である。その計算は以下のようなものである。

(1) 漸化式(2.1.1)の中に在る因子 $(\xi-t')^2$ を指数関数の微分で表す。すなわち，

$$(\xi-t')^2=(\partial/\partial a)^2\,\mathrm{e}^{-a(\xi-t')}\big|_{a=0}.$$

(2) $\phi_0(s+2m,t)$ と $\Phi_{m-1}(s,\xi-t,t)$ は e^{bt} 型の指数関数を含む。(2.1.1)の t' に関する積分は単に $\mathrm{e}^{(a+b)t'-a\xi}$ を積分するだけでよい。不定積分が直ちに求められる：$\mathrm{e}^{bt'-a(\xi-t')}/(a+b)$.

(3) $\Phi_m(s,\xi-t,t)$ はこのような計算を m 回重ねて得られる。すなわち

$$\begin{aligned}&\int_0^t\phi_0(s+2m,t-t')\mathrm{e}^{-a_m(\xi-t')}\Phi_{m-1}(s,\xi-t',t')dt'\\&=f(a_m,a_{m-1},\cdots,a_1)\end{aligned}$$

と表せば，

$$\begin{aligned}&\Phi_m(s,\xi-t,t)\\&=(\partial/\partial a_m)^2(\partial/\partial a_{m-1})^2\cdots(\partial/\partial a_1)^2\\&\times f(a_m,a_{m-1},\cdots,a_1)\big|_{a_m=a_{m-1}=\cdots=a_1=0}.\end{aligned}$$

直感的に分かりやすい計算である。

2.2. 計算－逐次 2 階微分法－

計算していく各 $\Phi_m(s,\xi-t,t)$ を文献 2 における表記と区別し，ここでは記号~を付して $\tilde{\Phi}_m(s,\xi-t,t)$ と表す。

$$\begin{aligned}&\tilde{\Phi}_1(s,\xi-t,t)\\&=\int^t\phi_0(s+2,t-t')\,\mathrm{e}^{-a_1(\xi-t')}\,\phi_0(s,t')dt'\end{aligned}$$

$$= \sum_{i_1, i_0 = 1,2} H_{i_1} H_{i_0}\, \mathrm{e}^{\lambda_{i_1} t - a_1 \xi} \int^t \mathrm{e}^{\left(\lambda_{i_0 i_1} + a_1\right) t'} dt'$$

$$= \sum_{i_1, i_0 = 1,2} H_{i_1} H_{i_0} \frac{\mathrm{e}^{\lambda_{i_0} t - a_1 (\xi - t)}}{\lambda_{i_0 i_1} + a_1}. \qquad (2.2)$$

ここで次のような略記を用いる：

$$H_{i_0} = H_{i_0}(s), H_{i_1} = H_{i_1}(s+2),$$
$$\lambda_{i_0 i_1} = \lambda_{i_0}(s) - \lambda_{i_1}(s+2). \qquad (2.3)$$

すなわち $m = 0, 1, \cdots$ ； $i_m = 1, 2$ とし，

$$H_{i_m} = H_{i_m}(s+2m), \lambda_{i_m} = \lambda_{i_m}(s+2m),$$
$$\lambda_{i_m i_n} = \lambda_{i_m}(s+2m) - \lambda_{i_n}(s+2n).$$

容易に分かるように積分下限からは $\mathrm{e}^{\lambda_{i_1} t}$（すなわち $\mathrm{e}^{\lambda_1 (s+2) t}$ や $\mathrm{e}^{\lambda_2 (s+2) t}$）を含む項が出る。高次に進むにつれてこれらから $\mathrm{e}^{\lambda_i (s+2) t}$，$\mathrm{e}^{\lambda_i (s+4) t}$，$\mathrm{e}^{\lambda_i (s+6) t}$，$\cdots$,（$i = 1, 2$）が派生していく。ところが主要項近似のもとでこれらはすべて無視できるものである。よって積分下限は初めから考慮する必要がない。このため扱う項数が抑えられ計算の煩雑さが軽減されるし，t のベキは現れない。

$$\tilde{\Phi}_2(s, \xi - t, t)$$
$$= \int^t \phi_0(s+4, t-t')\, \mathrm{e}^{-a_2(\xi - t')}$$
$$\times \tilde{\Phi}_1(s, \xi - t', t')\, dt'$$
$$= \sum_{i_2, i_1, i_0 = 1,2} \frac{H_{i_2} H_{i_1} H_{i_0}}{\lambda_{i_0 i_1} + a_1} \mathrm{e}^{\lambda_{i_2} t - (a_2 + a_1)\xi}$$
$$\times \int^t \mathrm{e}^{\left(\lambda_{i_0 i_2} + a_1 + a_2\right) t'} dt'$$
$$= \sum_{i_2, i_1, i_0 = 1,2} \frac{H_{i_2} H_{i_1} H_{i_0}\, \mathrm{e}^{\lambda_{i_0} t - (a_2 + a_1)(\xi - t)}}{\left(\lambda_{i_0 i_2} + a_2 + a_1\right)\left(\lambda_{i_0 i_1} + a_1\right)}, \qquad (2.4)$$

$$\tilde{\Phi}_m(s, \xi - t, t)$$
$$= \int^t \phi_0(s+2m, t-t')\, \mathrm{e}^{-a_m(\xi - t')}$$
$$\times \tilde{\Phi}_{m-1}(s, \xi - t', t')\, dt'$$
$$= \sum_{i_m, \cdots, i_0 = 1,2} H_{i_m} H_{i_{m-1}} \cdots H_{i_0}$$
$$\times \frac{\mathrm{e}^{\lambda_{i_0} t - (a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1)(\xi - t)}}{\left(\lambda_{i_0 i_m} + a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1\right)} \times$$
$$\times \frac{1}{\left(\lambda_{i_0 i_{m-1}} + a_{m-1} + \cdots + a_1\right)} \cdots$$
$$\times \frac{1}{\left(\lambda_{i_0 i_2} + a_2 + a_1\right)\left(\lambda_{i_0 i_1} + a_1\right)}. \qquad (2.5)$$

次に微分 $(\partial/\partial a_m)^2 \cdots (\partial/\partial a_1)^2$ を実行する。このとき分子の因子 $\mathrm{e}^{-(a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1)(\xi - t)}$ から $(\xi - t)$ のベキをもつ項が現れる。計算の最後の段階で極限 $(\xi - t) \to 0$ をとるためこれらを含む項は消滅する。よって分子の因子の微分は必要ない。微分を実行する前に $(\xi - t) = 0$ として $\mathrm{e}^{-(a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1)(\xi - t)}$ を除いておくことができる。よって(2.5)において $(\xi - t) \to 0$ とした表式は次のようになる。

$$\phi_m(s, t) = \sum_{i_m, \cdots, i_0 = 1,2} H_{i_m} H_{i_{m-1}} \cdots H_{i_0}\, \mathrm{e}^{\lambda_{i_0} t}$$
$$\times \left(\frac{\partial}{\partial a_m}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial a_{m-1}}\right)^2 \cdots \left(\frac{\partial}{\partial a_1}\right)^2$$
$$\times \frac{1}{\left(\lambda_{i_0 i_m} + a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1\right)}$$
$$\times \frac{1}{\left(\lambda_{i_0 i_{m-1}} + a_{m-1} + \cdots + a_1\right)} \times \cdots$$
$$\times \left. \frac{1}{\left(\lambda_{i_0 i_2} + a_2 + a_1\right)\left(\lambda_{i_0 i_1} + a_1\right)} \right|_{a_m = a_{m-1} = \cdots = a_1 = 0}. \qquad (2.6)$$

さらに $\mathrm{e}^{\lambda_2 (s) t} \ll \mathrm{e}^{\lambda_1 (s) t}$ が満たされるような深さ t（$t > 2$ なら十分である）においては $i_0 = 2$ の項を捨てることができる（主要項近似，補遺Ｉ）。このとき，

$$\phi_m(s, t) = H_1(s)\, \mathrm{e}^{\lambda_1 (s) t} \sum_{i_m, \cdots, i_1 = 1,2} H_{i_m} H_{i_{m-1}} \cdots H_{i_1}$$
$$\times \left(\frac{\partial}{\partial a_m}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial a_{m-1}}\right)^2 \cdots \left(\frac{\partial}{\partial a_1}\right)^2$$
$$\times \frac{1}{\left(\lambda_{i_0 i_m} + a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1\right)} \times$$

$$\times\frac{1}{\left(\lambda_{i_0 i_{m-1}}+a_{m-1}+\cdots+a_1\right)}$$

$\times\cdots\cdots$

$$\times\frac{1}{\left(\lambda_{i_0 i_2}+a_2+a_1\right)\left(\lambda_{i_0 i_1}+a_1\right)}\Bigg|_{\substack{a_m=\ a_{m-1}=\cdots=a_1=0\\ i_0=1}}.$$

この逐次 2 階微分法の特徴は数式がイメージしやすいこと，計算が簡単なことにある。よって漸化式の計算に有用である。

以下に例を示す。次の略記を使用する：

$$\lambda_{1i_1}=\lambda_1(s)-\lambda_{i_1}(s+2),\ H_{i_1}=H_{i_1}(s+2),$$

$$\lambda_{1i_2}=\lambda_1(s)-\lambda_{i_2}(s+4),\ H_{i_2}=H_{i_2}(s+4),$$

$$\lambda_{1i_3}=\lambda_1(s)-\lambda_{i_2}(s+6),\ H_{i_3}=H_{i_3}(s+6).$$

$$\phi_1(s,t)=H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\sum_{i_1=1,2}H_{i_1}\frac{2}{\lambda_{1i_1}{}^3},$$

$$\phi_2(s,t)=H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times\sum_{i_2,i_1=1,2}H_{i_2}H_{i_1}\left(\frac{24}{\lambda_{1i_2}{}^5\lambda_{1i_1}}+\frac{12}{\lambda_{1i_2}{}^4\lambda_{1i_1}{}^2}+\frac{4}{\lambda_{1i_2}{}^3\lambda_{1i_1}{}^3}\right),$$

$$\phi_3(s,t)=H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\sum_{i_3,i_2,i_1=1,2}H_{i_3}H_{i_2}H_{i_1}$$

$$\times\{(\frac{720}{\lambda_{1i_3}{}^7\lambda_{1i_2}}+\frac{480}{\lambda_{1i_3}{}^6\lambda_{1i_2}{}^2}+\frac{288}{\lambda_{1i_3}{}^5\lambda_{1i_2}{}^3}$$

$$+\frac{144}{\lambda_{1i_3}{}^4\lambda_{1i_2}{}^4}+\frac{48}{\lambda_{1i_3}{}^3\lambda_{1i_2}{}^5})\frac{1}{\lambda_{1i_1}}$$

$$\times(\frac{240}{\lambda_{1i_3}{}^6\lambda_{1i_2}}+\frac{144}{\lambda_{1i_3}{}^5\lambda_{1i_2}{}^2}+\frac{72}{\lambda_{1i_3}{}^4\lambda_{1i_2}{}^3}$$

$$+\frac{24}{\lambda_{1i_3}{}^3\lambda_{1i_2}{}^4})\frac{1}{\lambda_{1i_1}{}^2}$$

$$\times(\frac{48}{\lambda_{1i_3}{}^5\lambda_{1i_2}}+\frac{24}{\lambda_{1i_3}{}^4\lambda_{1i_2}{}^2}+\frac{8}{\lambda_{1i_3}{}^3\lambda_{1i_2}{}^3})\frac{1}{\lambda_{1i_1}{}^3}\}.$$

各項において $H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$ を除いた部分は，著者が以前に行列表示 1) で求めた $C_0^{(m)}\ (m=1,2,3)$ と一致する。ちなみに各々の $C_0^{(m)}$ は次のように求められている。

$$C_0^{(3)}=\sum_{i_3=1,2}H_{i_3}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{6!}{\lambda_{i_0i_3}{}^7} & \frac{5!}{\lambda_{i_0i_3}{}^6} & \frac{4!}{\lambda_{i_0i_3}{}^5} & \frac{3!}{\lambda_{i_0i_3}{}^4} & \frac{2!}{\lambda_{i_0i_3}{}^3} & \frac{1!}{\lambda_{i_0i_3}{}^2} & \frac{1}{\lambda_{i_0i_3}}\end{pmatrix}$$

$$\times{}^t\begin{pmatrix}C_4^{(2)} & C_3^{(2)} & C_2^{(2)} & C_1^{(2)} & C_0^{(2)} & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$${}^t\begin{pmatrix}C_4^{(2)} & C_3^{(2)} & C_2^{(2)} & C_1^{(2)} & C_0^{(2)}\end{pmatrix}=\sum_{i_2=1,2}H_{i_2}$$

$$\times\begin{pmatrix}\frac{4!/4!}{\lambda_{i_0i_2}} & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{4!/3!}{\lambda_{i_0i_2}{}^2} & \frac{3!/3!}{\lambda_{i_0i_2}} & 0 & 0 & 0\\ \frac{4!/2!}{\lambda_{i_0i_2}{}^3} & \frac{3!/2!}{\lambda_{i_0i_2}{}^2} & \frac{2!/2!}{\lambda_{i_0i_2}} & 0 & 0\\ \frac{4!/1!}{\lambda_{i_0i_2}{}^4} & \frac{3!/1!}{\lambda_{i_0i_2}{}^3} & \frac{2!/1!}{\lambda_{i_0i_2}{}^2} & \frac{1!/1!}{\lambda_{i_0i_2}} & 0\\ \frac{4!}{\lambda_{i_0i_2}{}^5} & \frac{3!}{\lambda_{i_0i_2}{}^4} & \frac{2!}{\lambda_{i_0i_2}{}^3} & \frac{1!}{\lambda_{i_0i_2}{}^2} & \frac{1}{\lambda_{i_0i_2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_2^{(1)}\\ C_1^{(1)}\\ C_0^{(1)}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}C_2^{(1)}\\ C_1^{(1)}\\ C_0^{(1)}\end{pmatrix}=\sum_{i_1=1,2}H_{i_1}\begin{pmatrix}\frac{2!/2!}{\lambda_{i_0i_1}} & 0 & 0\\ \frac{2!/1!}{\lambda_{i_0i_1}{}^2} & \frac{1!/1!}{\lambda_{i_0i_1}} & 0\\ \frac{2!}{\lambda_{i_0i_1}{}^3} & \frac{1!}{\lambda_{i_0i_1}{}^2} & \frac{1}{\lambda_{i_0i_1}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

$$C_2^{(1)}=\frac{1}{\lambda_{i_0i_1}},\ C_1^{(1)}=\frac{2}{\lambda_{i_0i_1}{}^2},\ C_0^{(1)}=\frac{2}{\lambda_{i_0i_1}{}^3}.$$

$$C_0^{(2)}=\sum_{i_1,i_2=1,2}H_{i_2}H_{i_1}$$

$$\times\begin{pmatrix}\frac{4!}{\lambda_{i_0i_2}{}^5} & \frac{3!}{\lambda_{i_0i_2}{}^4} & \frac{2!}{\lambda_{i_0i_2}{}^3}\end{pmatrix}$$

$$\times{}^t\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_{i_0i_1}} & \frac{2}{\lambda_{i_0i_1}{}^2} & \frac{2}{\lambda_{i_0i_1}{}^3}\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i_1,i_2=1,2}H_{i_2}H_{i_1}$$

$$\times\left(\frac{24}{\lambda_{i_0i_2}{}^5\lambda_{i_0i_1}}+\frac{12}{\lambda_{i_0i_2}{}^4\lambda_{i_0i_1}{}^2}+\frac{4}{\lambda_{i_0i_2}{}^3\lambda_{i_0i_1}{}^3}\right).$$

$$C_0^{(3)}=\sum_{i_1,i_2,i_3=1,2}H_{i_3}H_{i_2}H_{i_1}$$
$$\times\{\frac{720}{\lambda_{i_0i_3}\lambda_{i_0i_2}\lambda_{i_0i_1}}$$
$$+\frac{120}{\lambda_{i_0i_3}{}^6}\left(\frac{4}{\lambda_{i_0i_2}{}^2\lambda_{i_0i_1}}+\frac{2}{\lambda_{i_0i_2}\lambda_{i_0i_1}{}^2}\right)$$
$$+\frac{24}{\lambda_{i_0i_3}{}^5}\left(\frac{12}{\lambda_{i_0i_2}{}^3\lambda_{i_0i_1}}+\frac{6}{\lambda_{i_0i_2}{}^2\lambda_{i_0i_1}{}^2}+\frac{2}{\lambda_{i_0i_2}\lambda_{i_0i_1}{}^3}\right)$$
$$+\frac{6}{\lambda_{i_0i_3}{}^4}\left(\frac{24}{\lambda_{i_0i_2}{}^4\lambda_{i_0i_1}}+\frac{12}{\lambda_{i_0i_2}{}^3\lambda_{i_0i_1}{}^2}+\frac{4}{\lambda_{i_0i_2}{}^2\lambda_{i_0i_1}{}^3}\right)$$
$$+\frac{2}{\lambda_{i_0i_3}{}^3}\left(\frac{24}{\lambda_{i_0i_2}{}^5\lambda_{i_0i_1}}+\frac{12}{\lambda_{i_0i_2}{}^4\lambda_{i_0i_1}{}^2}+\frac{4}{\lambda_{i_0i_2}{}^3\lambda_{i_0i_1}{}^3}\right)\}.$$

以上の表式において$i_0=1$の項を採れば次式が確認できる：

$$C_0^{(1)}\cdot H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}=\phi_1(s,t),$$

$$C_0^{(2)}\cdot H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}=\phi_2(s,t),$$

$$C_0^{(3)}\cdot H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}=\phi_3(s,t).$$

以上から逐次微分法による計算結果と行列表示の計算結果との一致が確認される。異なる二つの計算方法はいみじくも互いの結果の検証手段を提供する。両方の計算結果が一致したことは「両者とも正しい」ことを証明している。

2.3. Kalos-Blatt の表式

(2.6)は次のようにも表すことができる：

$$\phi_n(s,t)=H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^2\sum_{i_n=1,2}\frac{H_{i_m}}{a-\lambda_{i_0i_n}}\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^2\sum_{i_{n-1}=1,2}\frac{H_{i_{m-1}}}{a-\lambda_{i_0i_{n-1}}}\times$$
$$\times\cdots\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^2\sum_{i_2=1,2}\frac{H_{i_2}}{a-\lambda_{i_0i_2}}\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)^2\sum_{i_1=1,2}\frac{H_{i_1}}{a-\lambda_{i_0i_1}}\Bigg|_{\substack{a=0\\ i_0=1}}.$$

すなわち，ここで得た結果は西村のテキスト[2)]にある次の Kalos-Blatt の表式において，

$\mathfrak{M}_{1,0}(n,s,t)/\Gamma(n+1)$としたものと同値である：

$$\mathfrak{M}_{1,0}(n,s,t)=\Gamma(n+1)H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$$
$$\times\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}f'(n)\frac{\partial^2}{\partial a^2}f'(n-1)\cdots\frac{\partial^2}{\partial a^2}f'(1)\right]_{a=0},$$

$$f'(n)=\frac{H_1(s+2n)}{a-\{\lambda_1(s)-\lambda_1(s+2n)\}}$$
$$+\frac{H_2(s+2n)}{a-\{\lambda_1(s)-\lambda_2(s+2n)\}}.$$

(1.1)の無限級数和は第Ⅲ稿で求める。

3. $\rho_m(s)$の値

漸化式(2.1.1),(2.1.2)から$\Phi_m(s,\xi-t,t)$が計算できる。これから$\phi_m(s,t)$が

$$\phi_m(s,t)=\lim_{(\xi-t)\to0}\Phi_m(s,\xi-t,t)$$

として求められ，主要項近似のもとで

$$\phi_m(s,t)=\rho_m(s)H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\qquad(3.1)$$

と表すことができる。漸化式(2.1.1)から求めた$\rho_m(s)$（$0\leqq m\leqq7$，$s=0.25\sim3$）を表 1 と図 1 に示す。

	S→	0.25	0.5	1
m↓	0	1	1	1
	1	3.52043.E-01	5.35542.E-01	8.17563.E-01
	2	1.01991.E-01	2.18294.E-01	4.65099.E-01
	3	2.65909.E-02	7.72363.E-02	2.20355.E-01
	4	6.44702.E-03	2.48521.E-02	9.26107.E-02
	5	1.47909.E-03	7.44862.E-03	3.56402.E-02
	6	3.24603.E-04	2.11013.E-03	1.27996.E-02
	7	6.86513.E-05	5.70607.E-04	4.34397.E-03

表 1-1. $\rho_m(s)$

S→		1.5	2	2.5
m↓	0	1	1	1
	1	1.01140.E+00	1.13867.E+00	1.22609.E+00
	2	6.77623.E-01	8.32552.E-01	9.43612.E-01
	3	3.69505.E-01	4.88167.E-01	5.75895.E-01
	4	1.76360.E-01	2.48466.E-01	3.03194.E-01
	5	7.63937.E-02	1.14172.E-01	1.43562.E-01
	6	3.06826.E-02	4.84690.E-02	6.26454.E-02
	7	1.15880.E-02	1.92974.E-02	2.55934.E-02

S→		3
m↓	0	1
	1	1.29349.E+00
	2	1.03123.E+00
	3	6.45769.E-01
	4	3.46928.E-01
	5	1.67063.E-01
	6	7.39787.E-02
	7	3.06260.E-02

表 1-2. $\rho_m(s)$

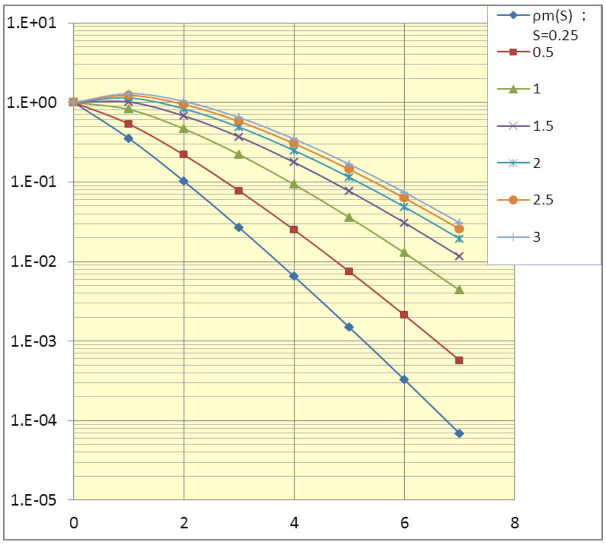

図 1.　$\rho_m(s)$　vs.　m

これらは Prony 内挿法の関係式；

$$\sum_{i=1}^{M} C_i(s)\alpha_i(s)^m = m!\rho_m(s) \qquad (3.2)$$

$(M=4)$, から $C_i(s), \alpha_i(s)$ を決定するためのデータを与えるものである。

$C_i(s), \alpha_i(s)$ $(i=1\sim4)$ は第Ⅲ稿補遺Ⅱに示す。

参考文献

1)　新居誠彦，3 次元電磁カスケード理論 B 近似ラテラル分布関数の計算Ｖ，足利工業大学研究集録　第 **51** 号(2017.3),111.

2)　J.Nishimura, Handbuch der Physik. **XLVI/2**(1967), 105

補遺Ⅰ．主要項近似

(2.1.1)によって逐次計算していくとき，Φ_1 には $a_i(s)e^{\lambda_i(s)t}, b_i(s)e^{\lambda_i(s+2)t}$ $(i=1,2)$ の型の項が現れる。その各項から派生して Φ_2 には $a_i'(s)e^{\lambda_i(s)t}$, $b_i'(s)e^{\lambda_i(s+2)t}, c_i'(s)e^{\lambda_i(s+4)t}$ の型の項が現れる。項数は次数とともに急激に増えていく。そのため計算は極めて煩雑になっていく。ところがある近似によって項数の急増を抑え，計算の煩雑さを軽減することができる。以下その理由を述べる。

カスケード関数 $\lambda_1(s), \lambda_2(s)$ について次の関係がある（図 2）。

(1)　$\lambda_1(s)$ は s の減少関数,

(2)　つねに $\lambda_1(s) > \lambda_2(s)$.

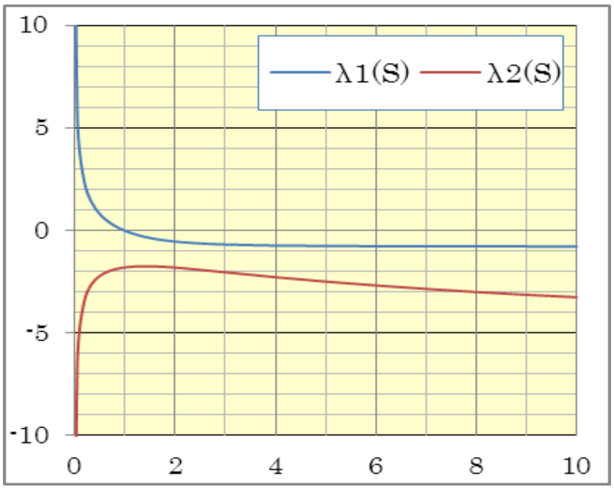

図 2. $\lambda_1(s), \lambda_2(s)$ **vs.** s

よって深さ $t \gtrsim 1$ で次式が成り立つ（図 3）。

$$e^{\lambda_1(s)t} > e^{\lambda_1(s+2)t} > e^{\lambda_1(s+4)t} > \cdots,$$

$$e^{\lambda_1(s)t} \gg e^{\lambda_2(s)t}, e^{\lambda_1(s+2)t} \gg e^{\lambda_2(s+2)t},$$
$$e^{\lambda_1(s+4)t} \gg e^{\lambda_2(s+4)t}, \cdots.$$

ゆえに，$t \gtrsim 1$ では $e^{\lambda_1(s)t}$ を含む項だけが主要であり，他の項を無視することができる。

積分下限から生じるのは $e^{\lambda_1(s+2m)t}, e^{\lambda_2(s+2m)t}$ なので下限からの寄与を考慮する必要がない。このような，主要な項のみを採用する計算をここでは主

要項近似と呼ぶことにする。これによって計算すべき項数は抑えられ煩雑さは軽減される。

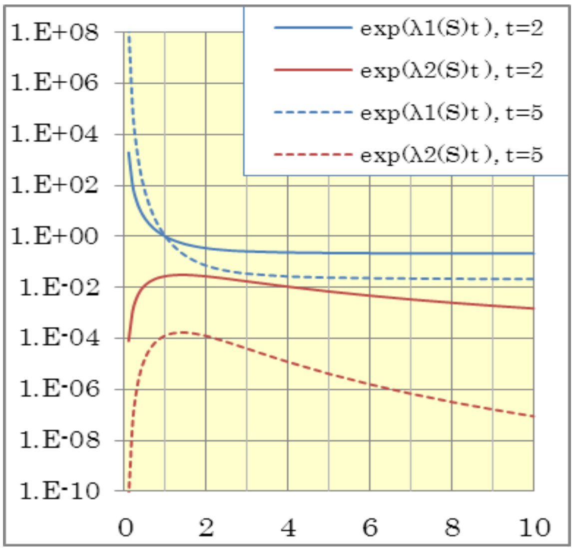

図 3. $\exp\left(\lambda_1(s)t\right), \exp\left(\lambda_2(s)t\right)$ vs. s

---

（第 I 稿から）

補遺 II . 指数行列 $\exp\left(P(s)t\right)$ の表式

$\begin{pmatrix} -A(s) & B(s) \\ C(s) & -\sigma_0 \end{pmatrix} = P(s)$ と表す。指数行列 $\mathrm{e}^{P(s)t}$ を求める。まず $P(s)$ の固有は,

$$\begin{vmatrix} -A(s)-\lambda & B(s) \\ C(s) & -\sigma_0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ から}$$

$$\lambda_{\substack{1\\2}}(s) = \frac{1}{2}\left(-A(s)-\sigma_0\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(A(s)-\sigma_0\right)^2 + 4B(s)C(s)}.$$

次に $P(s)$ の対角化行列 S, S^{-1} は

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\lambda_1(s)+A(s)}{B(s)} & \dfrac{C(s)}{\lambda_2(s)+\sigma_0} \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)} \begin{pmatrix} \lambda_1(s)+\sigma_0 & B(s) \\ \lambda_1(s)+A(s) & -B(s) \end{pmatrix},$$

$$S^{-1}P(s)S = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix}.$$

ゆえに,

$$\mathrm{e}^{P(s)t} = S \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1(s)t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2(s)t} \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と表すと 4 個の成分は次の通り：

$$a = \frac{\lambda_1(s)+\sigma_0}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)} \mathrm{e}^{\lambda_1(s)t} - \frac{\lambda_2(s)+\sigma_0}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)} \mathrm{e}^{\lambda_2(s)t},$$

$$b = \frac{B(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)} \left(\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t} - \mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}\right),$$

$$c = \frac{C(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)} \left(\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t} - \mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}\right),$$

$$d = -\frac{\lambda_2(s)+\sigma_0}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)} \mathrm{e}^{\lambda_1(s)t} + \frac{\lambda_1(s)+\sigma_0}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)} \mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}.$$

カスケード理論では次の表記がよく使われる。

$$\frac{\lambda_1(s)+\sigma_0}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)} = H_1(s),$$

$$-\frac{\lambda_2(s)+\sigma_0}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)} = H_2(s),$$

$$\frac{B(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)} = \sqrt{s}M(s),$$

$$\frac{C(s)}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)} = \frac{L(s)}{\sqrt{s}}.$$

とくに $H_1(s)+H_2(s)=1$.

以上から第 I 稿(5.21) , (5.22)の表式が得られる。

※ 足利大学名誉教授

原稿受付日　令和2年1月1日