3 次元電磁カスケード理論 A 近似エネルギー流ラテラル分布関数の計算 Ⅰ．拡散方程式の解－鈴木‐Trotter 公式を用いて－

新 居 誠 彦※

A Calculation of Energy-flow Lateral Distribution Function under Approximation A in Three Dimensional Electron-Photon Cascade Theory.

Ⅰ. Apprication of Suzuki-Trotter Formula to Solve the Landau's Basic Equation.

NII Nobuhiko

Abstract
We calculate the energy-flow lateral distribution function under Approximation A in the three-dimensional cascade theory. First, by using Suzuki-Trotter formula, we solve the three-dimensional diffusion equation (Landau's basic equation).

Keywords *: three-dimensional cascade theory, Landaus' basic equation, energy-flow lateral distribution function, Approximation A, Suzuki-Trotter formula.*

１． はじめに

電磁カスケード理論における 3 次元理論拡散方程式が LANDAU と RUMER [1] によって提唱された。その解を基にして各種の物理量（電子・光子の角分布や粒子数のラテラル分布, エネルギー流のラテラル分布など）が計算できる。西村は方程式の無限級数解を得た。[2] その次の段階で解をハンケル変換する計算が必要となる。しかしその値は恒等的にゼロになり有意義な結果が導かれない。この困難を克服するため複素平面上で計算する解析接続の方法を西村は提案した。[2] ところがその定式化の過程で現れる 2 重の複素ガンマ関数が処理されず, それ以降の計算が数式のままで留まっている。エネルギー流ラテラル分布関数や平均エネルギーラテラル分布関数の数式も未完の状態である。

われわれはこうした状況を前に進めたい。まず A 近似理論において次の各段階を辿りながら西村の計算を完成させる。そして結果を図示する。

(1) 3 次元拡散方程式を行列形式で解く。無限級数解$\left(f\left(Z_0,E,x,t\right),g\left(Z_0,E,x,t\right)\right)$を得る。

(2) 無限級数解を Dirichlet 級数に変換する。そのハンケル変換は有意義な結果を導き, 電子成分ラテラル分布関数微分スペクトルが計算できる。

$$\pi_2\left(E_0,E,r,t\right)=\int_0^\infty J_0\left(rx\right)f\left(E_0,E,x,t\right)2\pi x dx.$$

(3) ラテラル分布関数積分スペクトルを求める。

$$\Pi_2\left(E_0,E,r,t\right)=\int_E^{E_0}\pi_2\left(E_0,E,r,t\right)dE.$$

(4) 電子成分のエネルギー流ラテラル分布関数積分スペクトルを計算する。

$$\Pi_E\left(E_0,E,r,t\right)=\int_E^{E_0}E\,\pi_2\left(E_0,E,r,t\right)dE.$$

(5) 単位電子の平均エネルギーラテラル分布関数を計算する。

$$e_E\left(E_0,E,r,t\right)=\Pi_E\left(E_0,E,r,t\right)/\Pi_2\left(E_0,E,r,t\right).$$

(6) 各々の結果をグラフに示す。

当論文は 6 つの稿からなる。

第 I 稿（本稿）で 3 次元 A 近似拡散方程式を鈴木-Trotter 公式を用いて解く。

第Ⅱ稿で, 第 I 稿に現れた漸化式の簡単な計算方法を提案する。

第Ⅲ稿で電子数ラテラル分布関数積分スペクトル $\Pi_2\left(E_0,E,r,t\right)$ を計算する。平均エネルギーのラテラル分布を計算するときに必要になる。

第Ⅳ稿で電子のエネルギー流ラテラル分布関数積分スペクトル $\Pi_E\left(E_0,E,r,t\right)$ と平均エネルギーのラテラル分布関数 $e_E(E_0,E,r,t)$ を計算する。

第Ⅴ稿で西村の提案した解析接続の方法を用いて Π_2，Π_E を計算する。そこでは 2 重の複素ガンマ関数を適切に処理する。

第Ⅵ稿に Π_2,Π_E,e_E のグラフを示す。

2.　3 次元拡散方程式

LANDAU- RUMER による 3 次元拡散方程式 [1] は行列形式で次のように表される。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\begin{pmatrix}\pi\\ \gamma\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}-A' & B'\\ C' & -\sigma_0\end{pmatrix}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial E}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{E_s{}^2}{4E^2}\begin{pmatrix}\nabla_\theta^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\pi\\ \gamma\end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

ここで E は粒子（電子，光子）のエネルギー，ε は電子の電離損失を表す。対象にするエネルギーが大きい場合 $\left(\varepsilon\ll E\right)$ は上式の電離損失演算子 $\varepsilon\partial/\partial E$ を無視することができる。低いエネルギーまで対象にする場合 $\left(0\leq E<\varepsilon\right)$ にはこの項が必要である。電離損失を考慮する理論は B 近似理論, 考慮しない理論は A 近似理論と呼ばれる。

2.1. A 近似拡散方程式

B 近似理論の扱いは A 近似理論より複雑となるため，当論文では A 近似理論をまず対象にする。※) このとき拡散方程式は次のようになる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\begin{pmatrix}\pi\\ \gamma\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}-A' & B'\\ C' & -\sigma_0\end{pmatrix}+\frac{E_s{}^2}{4E^2}\begin{pmatrix}\nabla_\theta^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\pi\\ \gamma\end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

$\pi\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)d\vec{r}d\vec{\theta}dE$ は，入射エネルギー Z_0 の粒子（電子または光子）が創る電子のうち，深さ t において変位が($\vec{r}\sim\vec{r}+d\vec{r}$)・偏角が($\vec{\theta}\sim\vec{\theta}+d\vec{\theta}$)・ネルギーが($E\sim E+dE$)の電子数を表す。$\gamma\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)d\vec{r}d\vec{\theta}dE$ は光子数。入射エネルギーは，$Z_0=E_0$ が電子の場合，$Z_0=W_0$ が光子の場合を表す。$\nabla_\theta{}^2$ は角に関するラプラシアン；$\nabla_\theta{}^2=\partial^2/\partial\theta_1{}^2+\partial^2/\partial\theta_2{}^2$.

$E_s=21\mathbf{MeV}$ は散乱エネルギー，$-A'\pi$, $B'\gamma$ はそれぞれ輻射, 対創生による電子数の変化を表すカスケード演算子，$C'\pi$ は輻射よる光子数の変化を表すカスケード演算子，$-\sigma_0\gamma$ は対創生による光子の吸収を表す $\left(\sigma_0=0.7733\cdots\right)$。

※）B 近似のエネルギー流ラテラル分布関数の計算は別の機会に示す。

2.2. フーリエ変換

π,γ をフーリエ変換すれば ${\nabla_\theta}^2$ の演算が実行できる。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\pi\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)\mathrm{e}^{i\vec{r}\cdot\vec{x}+i\vec{\theta}\cdot\vec{\varsigma}}\,d\vec{r}d\vec{\theta}$$
$$=f\left(Z_0,E,\vec{x},\vec{\varsigma},t\right), \tag{2.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\gamma\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)\mathrm{e}^{i\vec{r}\cdot\vec{x}+i\vec{\theta}\cdot\vec{\varsigma}}\,d\vec{r}d\vec{\theta}$$
$$=g\left(Z_0,E,\vec{x},\vec{\varsigma},t\right) \tag{2.4}$$

と記すと，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\vec{x}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{\varsigma}}\right)\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}-A' & B'\\ C' & -\sigma_0\end{pmatrix}-\frac{{E_s}^2\varsigma^2}{4E^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

3.　角分布関数，ラテラル分布関数

角分布関数 $\pi_1\left(Z_0,E,\theta,t\right)$，ラテラル分布関数 $\pi_2\left(Z_0,E,\vec{r},t\right)$ は各々，

$$\pi_1\left(Z_0,E,\vec{\theta},t\right)=\iint\pi\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)d\vec{r}, \tag{3.1}$$

$$\pi_2\left(Z_0,E,\vec{r},t\right)=\iint\pi\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)d\vec{\theta} \tag{3.2}$$

によって得られる。

$\pi\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)$ はフーリエ逆変換から

$$\pi\left(Z_0,E,\vec{r},\vec{\theta},t\right)$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\iint f\left(E_0,E,\vec{x},\vec{\zeta},t\right)\mathrm{e}^{-i\vec{r}\cdot\vec{x}-i\vec{\theta}\cdot\vec{\zeta}}\,d\vec{x}d\vec{\zeta}. \tag{3.3}$$

よって，ラテラル分布関数は

$$\pi_2\left(Z_0,E,\vec{r},t\right)=\frac{1}{4\pi^2}$$
$$\times\int d\vec{\theta}\iint f\left(E_0,E,\vec{x},\vec{\zeta},t\right)\mathrm{e}^{-i\vec{r}\cdot\vec{x}-i\vec{\theta}\cdot\vec{\zeta}}\,d\vec{x}d\vec{\zeta}. \tag{3.4}$$

然るに，

$$\int\mathrm{e}^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{\zeta}}\,d\vec{\theta}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-i\theta_1\zeta_1-i\theta_2\zeta_2}\,d\theta_1 d\theta_2$$
$$=\left(2\pi\right)^2\delta\left(\zeta_1\right)\delta\left(\zeta_2\right)=\left(2\pi\right)^2\delta\left(\vec{\zeta}\right). \tag{3.5}$$

よって，

$$\pi_2\left(Z_0,E,r,t\right)$$
$$=\iint\iint f\left(Z_0,E,\vec{x},\vec{\zeta},t\right)\mathrm{e}^{-i\vec{r}\cdot\vec{x}-i\vec{\theta}\cdot\vec{\zeta}}\delta\left(\vec{\zeta}\right)d\vec{x}\,d\vec{\zeta}$$
$$=\iint f\left(Z_0,E,\vec{x},0,t\right)\mathrm{e}^{-i\vec{r}\cdot\vec{x}}\,d\vec{x}$$
$$=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}f\left(E_0,E,x,0,t\right)\mathrm{e}^{-irx\cos\varphi}\,xdxd\varphi. \tag{3.6}$$

補遺に示すように

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-irx\cos\varphi}d\varphi=2\pi J_0(rx)$$

は(0 次の)ベッセル関数 [2] である。ゆえに

$$\pi_2\left(Z_0,E,r,t\right)$$
$$=\int_0^{\infty}f\left(Z_0,E,x,0,t\right)J_0\left(rx\right)2\pi xdx. \tag{3.7}$$

同様にして角分布関数は，

$$\pi_1\left(Z_0,E,\theta,t\right)$$
$$=\int_0^{\infty}f\left(Z_0,E,0,\zeta,t\right)J_0\left(\theta\zeta\right)2\pi\zeta d\zeta. \tag{3.8}$$

角分布関数 $\pi_1\left(Z_0,E,\theta,t\right)$ を求めるのに必要な $f\left(Z_0,E,0,\zeta,t\right)$ は(2.5)で $\vec{x}=0$ とおいた方程式から得られる。一方，ラテラル分布関数を得るのに必要な $f\left(Z_0,E,x,0,t\right)$ は(2.5)において $\vec{\varsigma}=0$ と置いて求めることができない。$\vec{x}\cdot\partial f/\partial\vec{\varsigma}$ という微分項が存在するからである。この項を消去する変換を次節で考察する。

4.　方程式(2.5)の変換

(2.5)左辺の演算子 $\partial/\partial t-\vec{x}\cdot\partial/\partial\vec{\varsigma}$ を，$\vec{\varsigma}$ の微分を消去した形の演算子 $\partial/\partial t'$ に変換する 1 次変換を考える。先ず，互いに独立である $\vec{\varsigma}$ と $\vec{x}$ を平行にとり，$\vec{x}=\left(x,0\right)$, $\vec{\varsigma}=\left(\varsigma,0\right)$ とする。このとき

※）係数を除いた(3.7),(3.8)の積分変換を $f\left(x\right),f\left(\zeta\right)$ に対する（0 次の）ハンケル変換と呼ぶ。

$$-\vec{x}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{\varsigma}}=-x\frac{\partial}{\partial\varsigma}.$$

次に，$\begin{pmatrix} t' \\ \varsigma' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} t \\ \varsigma \end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$とおく。

$\begin{pmatrix} \partial/\partial t \\ \partial/\partial\varsigma \end{pmatrix}={}^{t}A\begin{pmatrix} \partial/\partial t' \\ \partial/\partial\varsigma' \end{pmatrix}$.　よって，

$$\frac{\partial}{\partial t}-x\frac{\partial}{\partial\varsigma}=\left(a_{11}-xa_{12}\right)\frac{\partial}{\partial t'}+\left(a_{21}-xa_{22}\right)\frac{\partial}{\partial\varsigma'}.$$

ここで$\partial/\partial t-x\partial/\partial\varsigma=\partial/\partial t'$，$t'=t$を要請すると$a_{11}=1, a_{12}=0, a_{21}=xa_{22}$. 任意の$a_{22}\ (\neq 0)$は簡単のため 1 にとる(こうしても一般性は失われない)。

$\begin{pmatrix} t' \\ \varsigma' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ \varsigma \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} t \\ \varsigma \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} t' \\ \varsigma' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t' \\ \varsigma' \end{pmatrix}.$$

よって　$\varsigma=\varsigma'-xt'$.ベクトルςはベクトルxと同じ方向をもつからς'も同様。よってスカラーξを用いて$\varsigma'=\xi x$とおくことができる。

$\varsigma=\left(\xi-t'\right)x$　と表されるので方程式(2.5)は次式に変換される（t'を単にtと記す）；

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix} -A' & B' \\ C' & -\sigma_0 \end{pmatrix}-\frac{{E_s}^2x^2}{4E^2}\left(\xi-t\right)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

(2.5)から微分項$\vec{x}\cdot\partial f/\partial\vec{\zeta}$を消去した表式(4.1)が得られた。よってラテラル分布関数はこの解から次のように求められる。

$$\pi_2\left(Z_0,E,r,t\right)=\lim_{(\xi-t)\to 0}\int_0^\infty f\left(Z_0,E,x,\xi-t,t\right)J_0\left(rx\right)2\pi x dx. \tag{4.2}$$

5.　A 近似拡散方程式の解

5.1.　メリン変換

拡散方程式をメリン変換 [3] するとカスケード演算子$-A', B', C'$の演算が実行できる。Eの関数$k\left(E\right)$のメリン変換はsを複素数として次式で定義される。

$$\mathfrak{M}_k\left(s\right)=\int_0^\infty E^s k\left(E\right)dE.$$

逆変換は

$$k\left(E\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_c E^{-s-1}\mathfrak{M}_k\left(s\right)ds.$$

カスケード演算子について

$$\int_0^\infty E^s\left(-A'\right)f(E)dE=-A\left(s\right)\mathfrak{M}_f\left(s\right), \tag{5.1.1}$$

$$\int_0^\infty E^s B'g\left(E\right)dE=B\left(s\right)\mathfrak{M}_g\left(s\right), \tag{5.1.2}$$

$$\int_0^\infty E^s C'f\left(E\right)dE=C\left(s\right)\mathfrak{M}_f\left(s\right) \tag{5.1.3}$$

が成り立つ。[2),3)]

$$\int_0^\infty E^s f\left(Z_0,E,x,\xi-t,t\right)dE=\mathfrak{M}_f\left(Z_0,s,x,\xi-t,t\right),$$

$$\int_0^\infty E^s g\left(Z_0,E,x,\xi-t,t\right)dE=\mathfrak{M}_g\left(Z_0,s,x,\xi-t,t\right)$$

とおく。ここで$Z_0=E_0$（電子入射の場合），$Z_0=W_0$（電子入射の場合）を表す。

$\mathfrak{M}_f\left(Z_0,s,x,\xi-t,t\right), \mathfrak{M}_g\left(Z_0,s,x,\xi-t,t\right)$

を$\mathfrak{M}_f\left(s,t\right)$，$\mathfrak{M}_g\left(s,t\right)$と略記する。

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f\left(s,t\right) \\ \mathfrak{M}_g\left(s,t\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -A\left(s\right) & B\left(s\right) \\ C\left(s\right) & -\sigma_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f\left(s,t\right) \\ \mathfrak{M}_g\left(s,t\right) \end{pmatrix}-\frac{1}{4}{E_s}^2x^2\left(\xi-t\right)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_f\left(s-2,t\right) \\ \mathfrak{M}_g\left(s-2,t\right) \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

光子成分は散乱を受けないので右辺第 2 項第 2 成分は$\mathfrak{M}_g\left(s,t\right)$であるが，電子成分に揃えて見

やすくし $\mathfrak{M}_g(s-2,t)$ と記す。散乱の影響がないのでこのように表記しても支障がない。

5.2. 差分演算子とずらし演算子

ここで差分演算子 Δ を導入する。

$$\Delta f(s)=f(s)-f(s-2). \tag{5.3}$$

このとき

$$(1-\Delta)f(s)=f(s-2), \tag{5.4.1}$$

$$(1-\Delta)^n f(s)=f(s-2n),\ n=1,2,3,\cdots. \tag{5.4.2}$$

と表されるので $1-\Delta$ を“ずらし演算子”とここでは呼ぶ。これを用いると,

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_f(s-2n,t)\\ \mathfrak{M}_g(s-2n,t)\end{pmatrix}=(1-\Delta)^n\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_f(s,t)\\ \mathfrak{M}_g(s,t)\end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

よって

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_f(s,t)\\ \mathfrak{M}_g(s,t)\end{pmatrix}=\{\begin{pmatrix}-A(s) & B(s)\\ C(s) & -\sigma_0\end{pmatrix}$$
$$-\frac{E_s{}^2x^2}{4}(\xi-t)^2(1-\Delta)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\}\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_f(s,t)\\ \mathfrak{M}_g(s,t)\end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

ここで略記を導入し,

$$\begin{pmatrix}-A(s) & B(s)\\ C(s) & -\sigma_0\end{pmatrix}=P(s), \tag{5.7}$$

$$-\frac{1}{4}E_s{}^2x^2\,(\xi-t)^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=R(x,t), \tag{5.8}$$

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_f(s,t)\\ \mathfrak{M}_g(s,t)\end{pmatrix}=\mathfrak{M}(s,t) \tag{5.9}$$

と表すと,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{M}(s,t)$$
$$=\{P(s)+(1-\Delta)R(x,t)\}\mathfrak{M}(s,t). \tag{5.10}$$

行列 $P(s)$ と $R(x,t)$ は非可換である：

$$P(s)R(x,t)\neq R(x,t)P(s). \tag{5.11}$$

5.3. 鈴木-Trotter 公式の適用

非可換行列を含む(5.10)の解は鈴木-Trotter 公式 [4),5)] を用いて表される：

$$\mathfrak{M}(s,t)=\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}_n(s,t), \tag{5.12}$$

$$\mathfrak{M}_n(s,t)$$
$$=\prod_{k=0}^{n}\left(\mathrm{e}^{(1-\Delta)R(x,t_k)\Delta t}\,\mathrm{e}^{P(s)\Delta t}\right)\cdot\mathfrak{M}_0(s), \tag{5.13}$$

$$\Delta t=t/n,\ t_k=k\Delta t,\ \mathfrak{M}_0(s)=\mathfrak{M}(s,0). \tag{5.14}$$

初期条件を入射エネルギーが夫々 E_0, W_0 の電子, 光子の同時入射であるとすると,

$$\mathfrak{M}_0(s)=\int_0^\infty E^s\begin{pmatrix}\delta(E-E_0)\\ \delta(E-W_0)\end{pmatrix}dE$$
$$=\begin{pmatrix}E_0{}^s\\ W_0{}^s\end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

(5.13)のはじめの指数行列を展開する。

$$\mathrm{e}^{(1-\Delta)R(x,t_k)\Delta t}$$
$$=U+(1-\Delta)R(x,t_k)\Delta t+o(\Delta t)^2.$$

このとき $\mathfrak{M}_n(s,t)$ の行列部分は：

$$\mathrm{e}^{P(s)t}+\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{P(s)(t-t_k)}R(x,t_k)\Delta t(1-\Delta)\mathrm{e}^{P(s)t_k}$$
$$+\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{P(s)(t-t_k)}R(x,t_k)\Delta t(1-\Delta)$$
$$\times\sum_{\ell=0}^{k}\mathrm{e}^{P(s)(t_k-t_\ell)}R(x,t_\ell)\Delta t(1-\Delta)\mathrm{e}^{P(s)t_\ell}+\cdots.$$

極限($n\to\infty$)をとれば和は積分に移行する。

上式第 2 項＝

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{P(s)(t-t_k)}R(x,t_k)\Delta t(1-\Delta)\mathrm{e}^{P(s)t_k}$$
$$=\int_0^t\mathrm{e}^{P(s)(t-t')}R(x,t')dt'(1-\Delta)\mathrm{e}^{P(s)t'},$$

第 3 項＝

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{P(s)(t-t_k)}R(x,t_k)\Delta t(1-\Delta)$$
$$\times\sum_{\ell=0}^{k}\mathrm{e}^{P(s)(t_k-t_\ell)}R(x,t_\ell)\Delta t(1-\Delta)\mathrm{e}^{P(s)t_\ell}$$

$$=\int_0^t e^{P(s)(t-t'')}R(x,t'')dt''(1-\varDelta)$$
$$\times\int_0^{t''} e^{P(s)(t''-t')}R(x,t')dt'(1-\varDelta)e^{P(s)t'},$$

以下同様。よって(5.13)は,

第 1 項$=e^{P(s)t}\mathfrak{M}_0(s)$,

第 2 項=

$$=\int_0^t e^{P(s)(t-t')}R(x,t')dt'\,e^{P(s-2)t'}\mathfrak{M}_0(s-2),$$

第 3 項＝

$$=\int_0^t e^{P(s)(t-t'')}R(x,t'')dt''$$
$$\times\int_0^{t''} e^{P(s-2)(t''-t')}R(x,t')dt'\,e^{P(s-4)t'}\mathfrak{M}_0(s-4),$$

$\cdots$.

5.4. メリン逆変換と s の原点ずらし

メリン逆変換を実行する。このとき積分路 c は虚軸に平行にとる。[3)]

第 1 項$=\dfrac{1}{8\pi^3 i}\displaystyle\int_c \frac{ds}{E^{s+1}}e^{P(s)t}\mathfrak{M}_0(s)$.

以下で $R(x,t)$ を元の表記に戻す。

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=Q_0 \tag{5.16}$$

とおくと，$R(x,t)=-\dfrac{E_s{}^2x^2}{4}(\xi-t)^2Q_0$.

第 2 項=

$$=\frac{1}{8\pi^3 i}\int_c \frac{ds}{E^{s+1}}$$
$$\times\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4}\right)\int_0^t e^{P(s)(t-t')}(\xi-t')^2dt'$$
$$\times Q_0\,e^{P(s-2)t'}\mathfrak{M}_0(s-2),$$

第 3 項=

$$=\frac{1}{8\pi^3 i}\int_c \frac{ds}{E^{s+1}}\int_0^t e^{P(s)(t-t'')}\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4}\right)(\xi-t'')^2dt''$$
$$\times Q_0\int_0^{t''} e^{P(s-2)(t''-t')}\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4}\right)(\xi-t'')^2dt'$$
$$\times Q_0\,e^{P(s-4)t'}\mathfrak{M}_0(s-4),\ \cdots.$$

然るに複素変数 s の原点を項別にずらしていくことができる。[6)] 第 2 項で $s\to s+2$，第 3 項で $s\to s+4$，…と，2 ずつ増やしていく。

第 2 項＝

$$=\frac{1}{8\pi^3 i}\int_c \frac{ds}{E^{s+1}}$$
$$\times\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\right)\int_0^t e^{P(s+2)(t-t')}(\xi-t')^2dt'$$
$$\times Q_0\,e^{P(s)t'}\mathfrak{M}_0(s),$$

第 3 項＝

$$=\frac{1}{8\pi^3 i}\int_c \frac{ds}{E^{s+1}}\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\right)^2\int_0^t e^{P(s+4)(t-t'')}(\xi-t'')^2dt''$$
$$\times Q_0\int_0^{t''} e^{P(s+2)(t''-t')}(\xi-t')^2dt'$$
$$\times Q_0\,e^{P(s)t'}\mathfrak{M}_0(s),\ \cdots.$$

ここで次の漸化式を導入する。

$$\varPhi_1(s,\xi-t,t)$$
$$=\int_0^t\phi_0(s+2,t-t')(\xi-t')^2dt'Q_0\varPhi_0(s,\xi-t',t'),$$

ただし $\varPhi_0(s,\xi-t,t)=\phi_0(s,t)=e^{P(s)t}$.

$$\varPhi_2(s,\xi-t,t)=\int_0^t\phi_0(s+4,t-t')(\xi-t')^2dt'$$
$$\times Q_0\varPhi_1(s,\xi-t',t'),\ \cdots.$$

$$\varPhi_m(s,\xi-t,t)=\int_0^t\phi_0(s+2m,t-t')(\xi-t')^2dt'$$
$$\times Q_0\varPhi_{m-1}(s,\xi-t',t'). \tag{5.17}$$

第 $m+1$ 項＝

$$=\frac{1}{8\pi^3 i}\int_c \frac{ds}{E^{s+1}}\left(-\frac{E_s{}^2x^2}{4E^2}\right)^m\varPhi_m(s,\xi-t,t)\,\mathfrak{M}_0(s),$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} f(Z_0,E,x,t) \\ g(Z_0,E,x,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{8\pi^3 i}$$

$$\times \int_c \frac{ds}{E^{s+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{E_s{}^2 x^2}{4E^2} \right)^m \phi_m(s,t) \begin{pmatrix} E_0{}^s \\ W_0{}^s \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

$$\phi_m(s,t) = \lim_{(\xi-t)\to 0} \Phi_m(s,\xi-t,t), \quad (5.19)$$

$$\Phi_0(s,\xi-t,t) = \phi_0(s,t) = \mathrm{e}^{P(s)t}. \quad (5.20)$$

$$\mathrm{e}^{P(s)t} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

と表すと各成分は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a &= H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t} + H_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}, \\ b &= \sqrt{s}M(s)\left(\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t} - \mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}\right), \\ c &= \frac{L(s)}{\sqrt{s}}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t} - \mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}\right), \\ d &= H_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t} + H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}. \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

(5.21)の計算は紙数の都合で第Ⅱ稿の補遺Ⅱに示す。漸化式(5.17)の計算は第Ⅱ稿で行う。

参考文献

1) L.D.Landau and G.Rumer, *Collected Papers of D LANDAU*,ed. D ter Haar(Pergamon Press,Headington Hill Oxford,London.1965), 252.

2) J.Nishimura, Handbuch der Physik. **XLVI/2**(1967), 1.

3) B. Rossi and K. Greisen, *Cosmic-Ray Theory,* Rev.Mod.Phys.(1941) 240.

4) M.Suzuki, Commun.Math.Phys. **51** (1976),183

5) H.F.Trotter, Proc.Amer.Math.Soc.**10** (1959), 545.

6) H.J.Bhabha,F.R.S. and S.K. Chakrabarty, Proc.R.Soc.London(Ser.A, Math.And Phys.) **181**(1943) 267.

7) 森口，宇田川，一松，岩波 数学公式Ⅲ(1960)，145.

補 遺　フーリエ逆変換とハンケル変換

次のフーリエ逆変換を計算する。

$$\left. \begin{aligned} &A = \iint f(x)\,\mathrm{e}^{-i\vec{r}\cdot\vec{x}}\,d\vec{x}, \\ &\vec{r}\cdot\vec{x} = rx\cos\varphi,\ d\vec{x} = xdxd\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (\mathrm{A1})$$

$$\iint f(x)\,\mathrm{e}^{-i\vec{r}\cdot\vec{x}}\,d\vec{x} = \int_0^\infty f(x)\,xdx \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-irx\cos\varphi} d\varphi.$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-irx\cos\varphi} d\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-irx)^k \int_0^{2\pi} \cos^k\varphi\, d\varphi,$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{-i\varphi}\right),$$

$$\cos^k\varphi = \left\{\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{i\varphi} + \mathrm{e}^{-i\varphi}\right)\right\}^k = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mathrm{e}^{i(k-2j)\varphi}.$$

然るに

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(k-2j)\varphi} d\varphi = 2\pi\delta_{k,2j}.$$

$$A = \int_0^\infty f(x)\,2\pi xdx \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{k!}(-irx)^k \frac{1}{2^k}\binom{k}{j}\delta_{k,2j}.$$

和の順序を入れ替えると，

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{k!}(-irx)^k \frac{1}{2^k}\binom{k}{j}\delta_{k,2j}$$ となる。

寄与があるのは$k=2j$の場合のみ。よって

$$A = \int_0^\infty f(x)\,2\pi xdx \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)!}(-irx)^{2j} \frac{1}{2^{2j}}\binom{2j}{j}$$

$$= \int_0^\infty f(x)\,2\pi xdx \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!^2}\left(-\frac{r^2x^2}{4}\right)^j.$$

然るに$\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!^2}\left(-\frac{r^2x^2}{4}\right)^j$は 0 次のベッセル関数の級数表示 7) そのものである。ゆえに，

$$A = \int_0^\infty f(x)\,J_0(rx)\,2\pi xdx. \quad (\mathrm{A2})$$

フーリエ逆変換(A1)はハンケル変換(A2)に帰着する。

※ 足利大学名誉教授

原稿受付日　令和2年1月1日