電磁カスケード理論　B 近似エネルギー流遷移曲線の計算

Ⅳ．電子成分および単位電子のエネルギー流遷移曲線の計算

新居誠彦※

Calculation of Transition Curves for Energy Flow under Approximation B
in Electron-Photon Cascade Theory.
Ⅳ. Computation of Energy Flow Transition Curves
for Electron Component and for a Single Electron.

Nobuhiko Nii

Abstract

We compute the energy flow transition curves of $\Pi_E\left(E_0,0,t\right)$ for electron component and of $e_E\left(E_0,0,t\right)=\Pi_E\left(E_0,0,t\right)/\Pi\left(E_0,0,t\right)$ for a single electron, and we reveal from the latter the average feature of a single electron in air shower.

Keywords: *Electron-photon cascade theory, Approximation B, Energy flow of electron, Transition curve.*

はじめに

電子数積分スペクトル $\Pi\left(E_0,0,t\right)$ を計算し第Ⅱ稿にその遷移曲線を示した。第Ⅲ稿で電子成分エネルギー流積分スペクトル $\Pi_E\left(E_0,0,t\right)$ を計算した。それらを組み合わせて単位電子のエネルギー流積分スペクトル $e_E\left(E_0,0,t\right)$ の遷移曲線を計算し，空気シャワー中の単位電子の平均的な特徴をみる。

1. 単位電子のエネルギー流遷移曲線

単位電子のエネルギー流（電子 1 個あたりの平均エネルギー）は，電子成分のエネルギー流積分スペクトルを電子数積分スペクトルで除して求められる。

$$e_E\left(E_0,0,t\right)=\Pi_E\left(E_0,0,t\right)/\Pi\left(E_0,0,t\right). \tag{1.1}$$

右辺の 2 つのスペクトルの表式は第Ⅱ稿，第Ⅲ稿から次の(1.2),(1.7)のように得た。

1.1. エネルギー流積分スペクトル

$$\Pi_E\left(E_0,0,t\right)/E_0=\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s\frac{1}{s\left(s+1\right)}$$
$$\times\frac{G_1\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_1(s+1)t}+G_2\left(s\right)\mathrm{e}^{\lambda_2(s+1)t}}{\sqrt{2\pi g''\left(s,t\right)}}\Big|_{s=s_2}, \tag{1.2}$$

$$G_i\left(s\right)=H_i\left(s+1\right)K_i\left(s+1,-s\right),\ i=1,2. \tag{1.3}$$

s_2 は $g'\left(s_2,t\right)=0$ の解（鞍点，エイジ）；

$$g'(s,t)=\ln\frac{E_0}{\varepsilon}-\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\lambda_1'(s+1)t$$
$$+\frac{G_1'(s)}{G_1(s)}+\frac{B_1'(s,t)}{B_1(s,t)}, \tag{1.4}$$

$$B_1(s,t)\doteq 1+\frac{G_2(s)}{G_1(s)}\mathrm{e}^{(\lambda_2(s+1)-\lambda_1(s+1))t}. \tag{1.5}$$

$$g''(s,t)=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{(s+1)^2}+\lambda_1''(s+1)t$$
$$+\left(\frac{G_1'(s)}{G_1(s)}\right)'+\left(\frac{B_1'(s,t)}{B_1(s,t)}\right)'. \tag{1.6}$$

1.2. 電子数積分スペクトル

$$\Pi\left(E_0,0,t\right)=\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s\frac{1}{s}$$
$$\times\frac{F_1(s)\,\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}+F_2(s)\,\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}}{\sqrt{2\pi f''(s,t)}}\Big|_{s=s_1}, \tag{1.7}$$

$$F_i(s)=H_i(s)K_i(s,-s),\ i=1,2. \tag{1.8}$$

s_1 は $f'(s_1,t)=0$ の解（鞍点，エイジ）；

$$f'(s,t)=\ln\frac{E_0}{\varepsilon}-\frac{1}{s}$$
$$+\frac{F_1'(s)}{F_1(s)}+\lambda_1'(s)t+\frac{A'(s,t)}{A(s,t)}. \tag{1.9}$$

$$f''(s,t)$$
$$=\frac{1}{s^2}+\left(\frac{F_1'(s)}{F_1(s)}\right)'+\lambda_1''(s)t+\left(\frac{A'(s,t)}{A(s,t)}\right)', \tag{1.10}$$

$$A(s,t)=1+\frac{F_2(s)}{F_1(s)}\mathrm{e}^{(\lambda_2(s)-\lambda_1(s))t}. \tag{1.11}$$

2. 単位電子のエネルギー流

単位電子のエネルギー流（1 電子あたりの平均エネルギー）遷移曲線；$e_E\left(E_0,0,t\right)=$

$=\Pi_E\left(E_0,0,t\right)/\Pi\left(E_0,0,t\right)$は次式によって計算する。

$$e_E\left(E_0,0,t\right)/E_0=\sqrt{\frac{f''(s_1,t)}{g''(s_2,t)}}$$
$$\times\frac{\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s\frac{1}{s(s+1)}\sum_{i=1,2}G_i(s)\mathrm{e}^{\lambda_i(s+1)t}\big|_{s=s_2}}{\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s\frac{1}{s}\sum_{i=1,2}F_i(s)\mathrm{e}^{\lambda_i(s)t}\big|_{s=s_1}}. \tag{2.1}$$

3. エネルギー流積分スペクトル遷移曲線

3.1. 電子成分エネルギー流積分スペクトルの遷移曲線

電子成分エネルギー流積分スペクトルを入射エネルギーで規格化した遷移曲線$\Pi_E\left(E_0,0,t\right)/E_0$ を図 1 に示す。

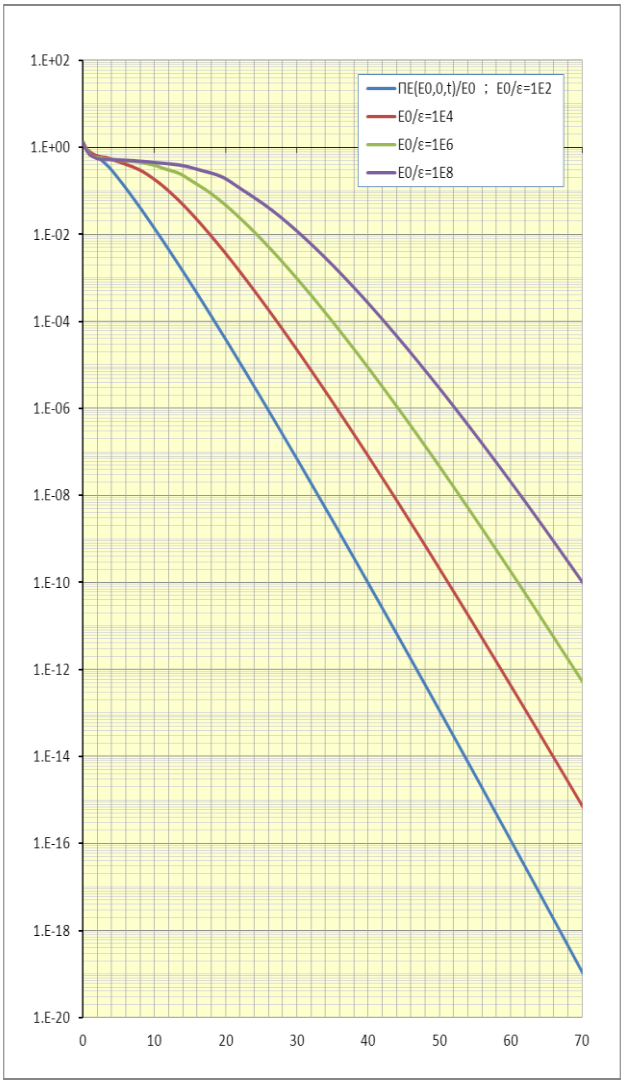

図 1. $\Pi_E\left(E_0,0,t\right)/E_0$ vs. t

3.2. 単位電子エネルギー流の遷移曲線

　単位電子エネルギー流の積分スペクトルを入射エネルギーで規格化した遷移曲線；

$e_E(E_0,0,t)/E_0$，を図 **2** に示す。

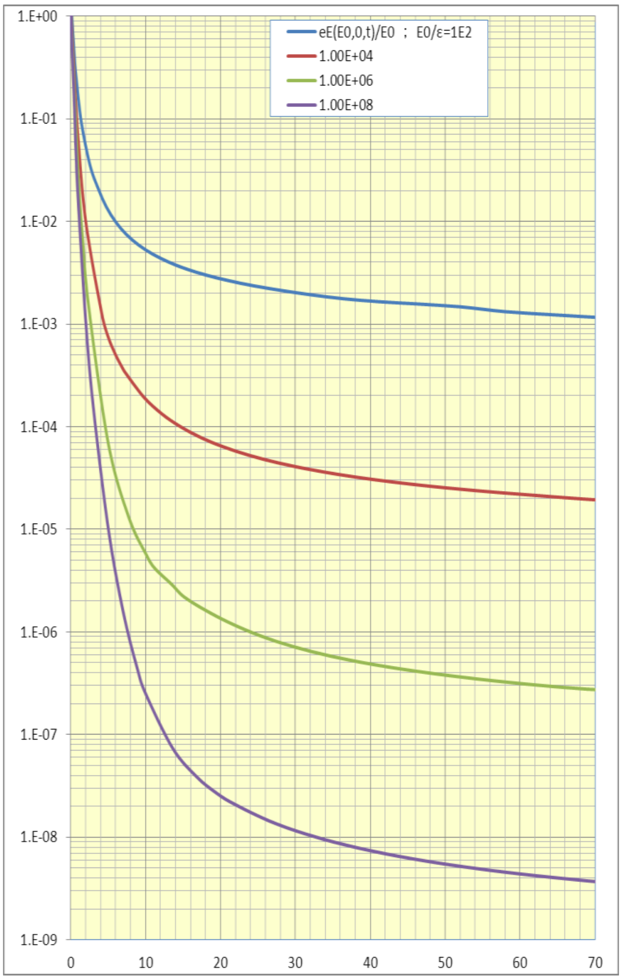

図 2　$e_E(E_0,0,t)/E_0$ vs. t

　平均エネルギーは，浅い領域では指数関数的に急減し，粒子数が最大になる深さ（Optimum thickness）近辺までは顕著に減少する。それより深い領域で減少が緩くなる。

3.3　電子数，電子成分エネルギー流，単位電子平均エネルギー3 種類積分スペクトルの遷移曲線

　入射エネルギー別にまとめた，電子数・電子エネルギー流・単位電子平均エネルギー積分スペクトルに対する 3 つの遷移曲線を図 **3.1**～**3.4** に示す。

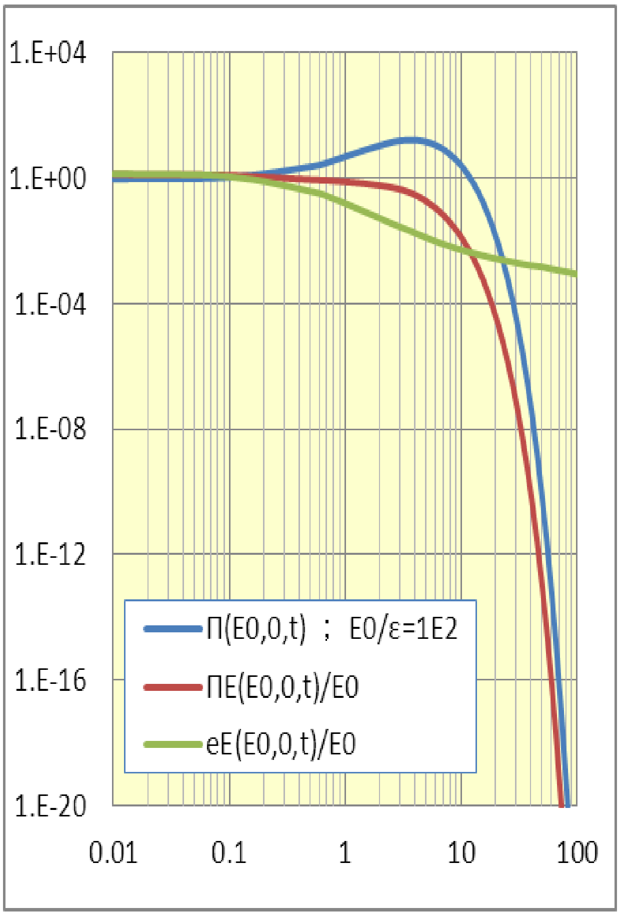

図 **3.1.** $E_0/\varepsilon=10^2$ の 3 遷移曲線

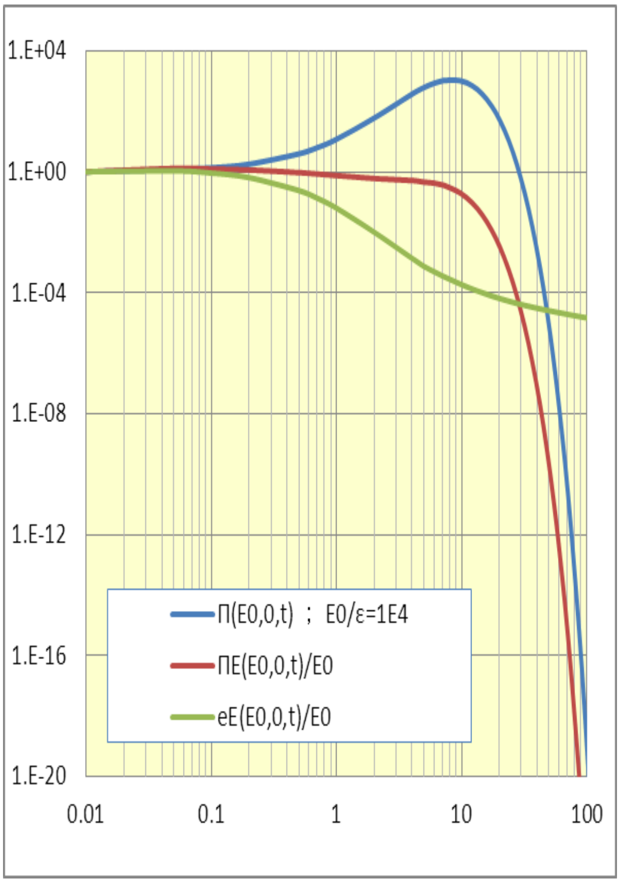

図 **3.2.** $E_0/\varepsilon=10^4$ の 3 遷移曲線

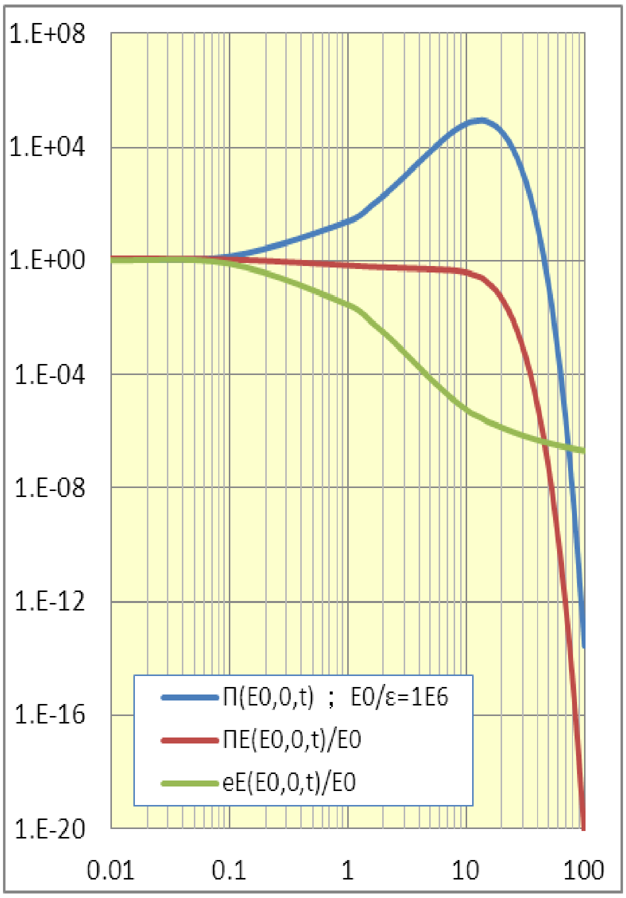

図 3.3. $E_0/\varepsilon=10^6$ の 3 遷移曲線

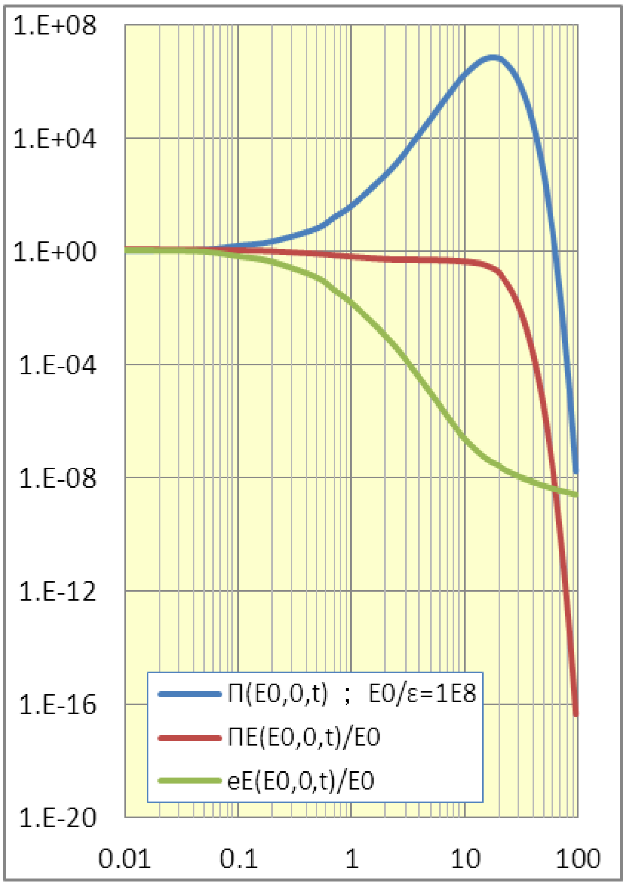

図 3.4. $E_0/\varepsilon=10^8$ の 3 遷移曲線

3.3.1. エネルギー流の振る舞い

エネルギー流は $0.01 \lesssim t \lesssim 0.5$ の範囲で大きな変化がなくエネルギー損失は未だ少ない。この範囲で $\Pi_E(E_0,0,t) \simeq E_0$ と見做すことができる。

その後のエネルギー流は，緩い減少から急激な減少へと変化を示すがその境界が入射エネルギーとともに後方へ移動していく。電子数最大の深さ T とその境界はほぼ一致する。この深さを過ぎるとエイジ $s_1>1$．よって $\lambda_1(s_1)<0$， $e^{\lambda_1(s_1)t}<1$ となり，媒質への吸収が顕著になる。すなわちエネルギーがカスケードから顕著に失われていくのでエネルギー流は急減していく。

この背景を次のような 3 段階の深さで考えることができる：

(i) 電子成分のエネルギーは輻射と吸収とによって失われていく。他方で対創生によってエネルギー補給されるので，電子成分のエネルギー減少が緩和される。

(ii) エイジが大きくなるにしたがって—$B(s)$ が s の減少関数，$A(s)$ が s の増加関数であるから—対創生が衰えだし輻射が優勢になっていく。

(iii) エイジがさらに大きくなっていくと—$e^{\lambda_1(s_2+1)t} \to e^{-\sigma_0 t}$ となるから—吸収は深さとともに増していく。

(ii),(iii)の効果が顕著になるような深さに達するとエネルギー流は激減していく。

3.3.2. 単位電子のエネルギー流，特徴ある 3 つの深さと平均エネルギー

単位電子エネルギー流は電子成分エネルギー流を電子数で除した量である。エネルギー流が緩い減少を示す範囲でも，電子数は顕著に増大していくから（1 電子の）平均エネルギーは顕著に減少していく。

特徴的な 3 つの深さがある；

(i) $\Pi\left(E_0,0,T\right)$＝最大となる T,

(ii) $e_E\left(E_0,0,t_0\right)=\varepsilon$ となる t_0 ,

(iii) $\Pi\left(E_0,0,t_1\right)=1$ となる t_1 .

この深さと平均エネルギーとの関係をみる。
まず深さ：

T は第Ⅱ稿図 7 から，t_0 , t_1 は本稿図 2 から夫々次のように読みとれる（**表 1**，**図 4**）。

E0/ε	T	t0	t1
1E+02	3.6	6.0	12.0
1E+04	8.3	14.7	28.8
1E+06	12.9	24.1	45.9
1E+08	17.6	32.9	63.1

表 1．T,t_0,t_1 vs. E_0/ε

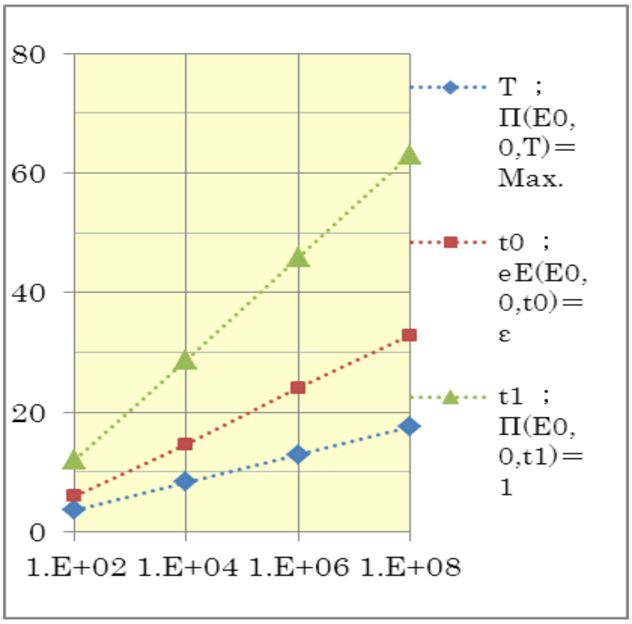

図 4．T,t_0,t_1 vs. E_0/ε

次にエネルギー：
図 2 から**表 2**，**図 5** のように読みとれる。

E0/ε	eE/ε at T	eE/ε at t0	eE/ε at t1
1E+02	2.12	1	0.44
1E+04	2.79	1	0.43
1E+06	3.22	1	0.42
1E+08	3.54	1	0.42

表 2　$t=T,t_0,t_1$ における $e_E\left(E_0,0,t\right)/\varepsilon$

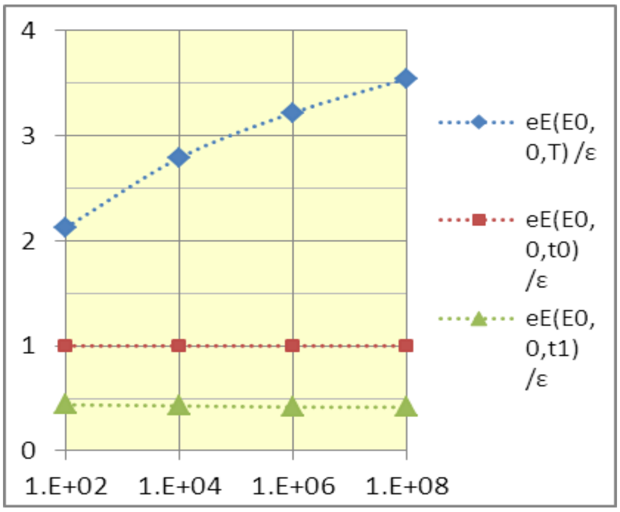

図 5　$t=T,t_0,t_1$ における $e_E\left(E_0,0,t\right)/\varepsilon$

以上から次の結論が導かれる：

(i) 入射エネルギーの広い範囲にも拘わらず深さ T（Optimum thickness）での平均エネルギーは範囲が狭く，かつ値が ε の程度である：

$e_E\left(E_0,0,T\right)/\varepsilon=2\sim3.5$.

この事情は次のように理解できる。すなわち，第Ⅲ稿 §2 でみた大胆な描像とエネルギー保存則とから

$N(T)=2^T$ ，$E(T)=E_0/N(T)$ ，$T\simeq\ln\left(E_0/\varepsilon\right)/\ln 2$

が成り立つ。そこで平均エネルギー

$e_E\left(E_0,0,T\right)$ を $E(T)$ に等しいと置けば次式が得られる：$e_E\left(E_0,0,T\right)=E_0 2^{-\ln(E_0/\varepsilon)/\ln 2}=\varepsilon$.

(ii) 平均エネルギーが電離損失エネルギー ε に等しくなる深さ t_0 は T の略 2 倍 $\left(t_0/T=1.7\sim1.9\right)$.

これより深い領域で電子成分は輻射と励起によってエネルギーを失う。

(iii) 平均電子数が 1 個になる深さ t_1 ,

$\Pi\left(E_0,0,t_1\right)=1$，は T のほぼ 3 倍（$t_1/T=$ 3.3〜3.6）．その深さにおいて平均エネルギーは入射エネルギーに依らずほぼ 0.4ε .

(iv) さらに深い領域は，$e_E(E_0,0,t)$ が有限の値を保つ（**図 3**）けれども，$\Pi(E_0,0,t)$ や $\Pi_E(E_0,0,t)$ が限りなく小さくなるためもはや興味の対象外となる。

3.3.3. 空気シャワー中の高エネルギー電子

上でみた 3 つの特徴的深さでの電子の平均エネルギーは ε 程度($3.5\varepsilon \sim 0.4\varepsilon$)であった。では，高エネルギー電子はどのような深さに存在するのか？ “高エネルギー”の閾値をここでは，空気シャワー解析においてよく扱われる 10GeV とする。媒質が空気の場合，$\varepsilon = 81\mathrm{MeV}$ [1] だから $e_E(E_0,0,t') = 10\mathrm{GeV} = 124\varepsilon$．図 2 から**表 3** 左の欄のように t' が得られる。

eE(E0,0,t')=10GeV		eE(E0,0,t'')=20GeV		eE(E0,0,t''')=50GeV	
E0/ε	t'	E0/ε	t''	E0/ε	t'''
1.24.E+02	0	2.47.E+02	0	6.17.E+02	0
1.0.E+04	1.9	1.0.E+04	1.5	1.0.E+04	1.0
1.0.E+06	4.5	1.0.E+06	3.9	1.0.E+06	3.1
1.0.E+08	7.4	1.0.E+08	6.5	1.0.E+08	5.5

表 3．10, 20, 50GeV を与える深さ t', t'', t'''.

$e_E(E_0,0,t'') = 20\mathrm{GeV}$, $e_E(E_0,0,t''') = 50\mathrm{GeV}$ についても同様（**表 3**，中・右の欄）。
表 3 を**図 6** に示す。**図 7** はそれらを Optimum thickness で規格化したもの。

$E_0/\varepsilon = 10^8$ の場合でさえ 10GeV の電子が存在する深さは 7.4 r.l.（Optimum thickness で測ればほぼ $0.4T$）。つまり高エネルギー電子が存在する深さは極めて浅く，その範囲の先端は T の 40%程度かそれ以下。入射エネルギーが低くなると，あるいは閾エネルギーが高くなると，存在範囲はさらに狭くなる（**図 7**）。

※） 足利大学名誉教授

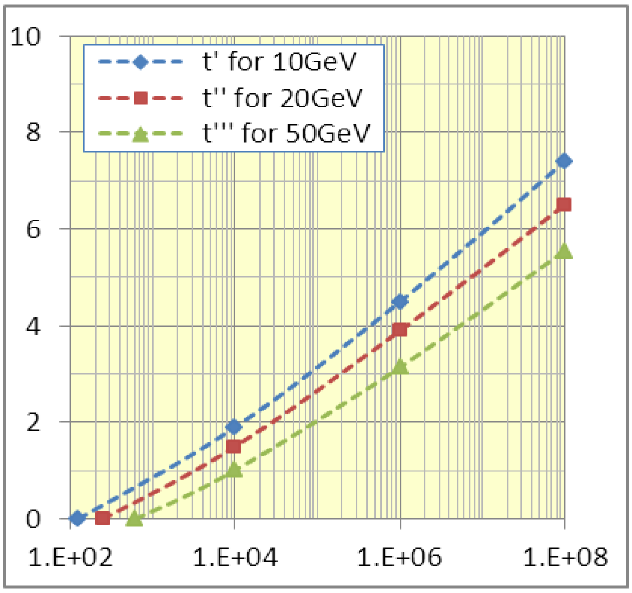

図 6　t', t'', t''' vs. E_0/ε

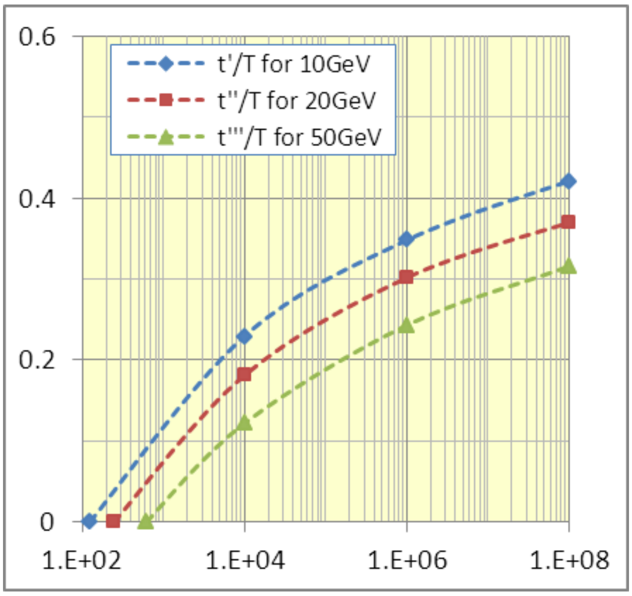

図 7　$t'/T, t''/T, t'''/T$ vs. E_0/ε

参考文献

1) J.Nishimura, Handbuch der Physik. XLVI/2(1967),1.

原稿受付日　平成 31 年 1 月 1 日