

電磁カスケード理論 B 近似エネルギー流遷移曲線の計算

III. エネルギー流の, K 関数と遷移曲線の計算

新居誠彦*

Calculation of Transition Curves for Energy Flow under Approximation B
in Electron-Photon Cascade Theory.

III. Calculations of K - functions and Transition Curves, for Energy Flow.

Nobuhiko Nii

Abstract

We derive calculation formulae of the K -functions, $K_1(s+1, -s)$ and $K_2(s+1, -s)$ for arbitrary value of s , which are necessary to obtain the energy flow transition curves, $\Pi_E(E_0, 0, t)$. By using the energy flow spectra and the number spectra of electron, we calculate the energy flow spectra for a single electron, $e_E(E_0, 0, t) = \Pi_E(E_0, 0, t) / \Pi(E_0, 0, t)$.

Keywords: *Electron-photon cascade theory, Approximation B, Energy flow of electron, Transition curve.*

はじめに

エネルギー流に関する K 関数を初めに求め、次に閾エネルギーがゼロの電子成分エネルギー流積分スペクトル $\Pi_E(E_0, 0, t)$ を計算する。粒子数積分スペクトルでそれを除し、単位電子エネルギー流 (1 電子あたりの平均エネルギー) の遷移曲線 $e_E(E_0, 0, t)$ を求める。空気シャワー中の電子の平均エネルギーにも触れる (第 IV 稿)。

1. エネルギー流積分スペクトルの計算

エネルギー流積分エネルギースペクトル

$\Pi_E(E_0, E, t)$ は次式で定義される。

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, E, t) &= \int_E^{E_0} E \pi(E_0, E, t) dE. \end{aligned} \quad (1.1)$$

微分スペクトルは第 I 稿 § 6.2 で求めた ;

$$\begin{aligned} \pi(E_0, E, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c^{E_0} E_0^s ds \\ &\times \left\{ H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \sum_{i=1}^N \frac{C_i(s)}{(E + \varepsilon \alpha_i(s))^{s+1}} \right. \\ &\left. + H_2(s) e^{\lambda_2(s)t} \sum_{i=1}^N \frac{D_i(s)}{(E + \varepsilon \beta_i(s))^{s+1}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.1. エネルギー積分

(1.2)の $\varepsilon\alpha_i(s)$ や $\varepsilon\beta_i(s)$ を a と記し(1.1)のエネ
ルギー積分の部分を A と記す;

$$A = \int_E^{E_0} \frac{EdE}{(E+a)^{s+1}} \cdot E = (E+a) - a \text{ だから,}$$

$$A = \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{(E+a)^{s-1}} - \frac{1}{(E_0+a)^{s-1}} \right)$$

$$- \frac{a}{s} \left(\frac{1}{(E+a)^s} - \frac{1}{(E_0+a)^s} \right). \quad (1.3)$$

微分スペクトル(1.2)の 2 つの項 ; $H_1(s)e^{\lambda_1(s)t}$,

$H_2(s)e^{\lambda_2(s)t}$ に対応して積分スペクトルを 2 つに
分ける ;

$$\Pi_E(E_0, E, t)$$

$$= \Pi_E^{(1)}(E_0, E, t) + \Pi_E^{(2)}(E_0, E, t).$$

各々は,

$$\Pi_E^{(1)}(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c E_0^s ds H_1(s) e^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^N \frac{C_i(s)}{s-1} \left\{ \frac{1}{(E + \varepsilon\alpha_i(s))^{s-1}} - \frac{1}{(E_0 + \varepsilon\alpha_i(s))^{s-1}} \right\} \right.$$

$$- \sum_{i=1}^N \frac{C_i(s) \varepsilon\alpha_i(s)}{s}$$

$$\left. \times \left\{ \frac{1}{(E + \varepsilon\alpha_i(s))^s} - \frac{1}{(E_0 + \varepsilon\alpha_i(s))^s} \right\} \right], \quad (1.4)$$

$$\Pi_E^{(2)}(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c E_0^s ds H_2(s) e^{\lambda_2(s)t}$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^N \frac{D_i(s)}{s-1} \left\{ \frac{1}{(E + \varepsilon\beta_i(s))^{s-1}} - \frac{1}{(E_0 + \varepsilon\beta_i(s))^{s-1}} \right\} \right.$$

$$- \sum_{i=1}^N \frac{D_i(s) \varepsilon\beta_i(s)}{s}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{(E + \varepsilon\beta_i(s))^s} - \frac{1}{(E_0 + \varepsilon\beta_i(s))^s} \right\}. \quad (1.5)$$

1.2. s の原点移動

パラメータ s の原点を -1 移動して

$\text{Re}(s-1) > 0$ とすることが出来る。¹⁾

(1.4)で $s \rightarrow s+1$ とすると,

$$\Pi_E^{(1)}(E_0, E, t) = \frac{E_0}{2\pi i} \int_c E_0^s ds H_1(s+1) e^{\lambda_1(s+1)t}$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^N \frac{C_i(s+1)}{s} \right.$$

$$\times \left\{ \frac{1}{(E + \varepsilon\alpha_i(s+1))^s} - \frac{1}{(E_0 + \varepsilon\alpha_i(s+1))^s} \right\}$$

$$- \sum_{i=1}^N \frac{C_i(s+1) \varepsilon\alpha_i(s+1)}{s+1}$$

$$\left. \times \left\{ \frac{1}{(E + \varepsilon\alpha_i(s+1))^{s+1}} - \frac{1}{(E_0 + \varepsilon\alpha_i(s+1))^{s+1}} \right\} \right]. \quad (1.6)$$

同様に(1.5)は,

$$\Pi_E^{(2)}(E_0, E, t) = \frac{E_0}{2\pi i} \int_c E_0^s ds H_2(s+1) e^{\lambda_2(s+1)t}$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^N \frac{D_i(s+1)}{s} \right.$$

$$\times \left\{ \frac{1}{(E + \varepsilon\beta_i(s+1))^s} - \frac{1}{(E_0 + \varepsilon\beta_i(s+1))^s} \right\}$$

$$- \sum_{i=1}^N \frac{D_i(s+1) \varepsilon\beta_i(s+1)}{s+1}$$

$$\left. \times \left\{ \frac{1}{(E + \varepsilon\beta_i(s+1))^{s+1}} - \frac{1}{(E_0 + \varepsilon\beta_i(s+1))^{s+1}} \right\} \right]. \quad (1.7)$$

1.3. $E=0$ の表式

(1.6),(1.7)において閾エネルギーを $E=0$ とす
ることが出来る。 $\Pi_E^{(1)}(E_0, 0, t)$ を計算する。

(注) (1.6),(1.7)で $\varepsilon\alpha_i(s), \varepsilon\beta_i(s) \ll E \ll E_0$ であるような E を考えて $\varepsilon\alpha_i(s) = \varepsilon\beta_i(s) = 0$ とおく。

$\sum_{i=1}^N C_i(s) = \sum_{i=1}^N D_i(s) = 1$ が成り立つから $\Pi_E(E_0, E, t) = \frac{E_0}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{ds}{s} (H_1(s+1)e^{\lambda_1(s+1)t} + H_2(s+1)e^{\lambda_2(s+1)t})$

となり A 近似の表式²⁾ が導かれる。つまりわれわれの定式化は A,B 両近似を統一したものである。

$$\begin{aligned} \Pi_E^{(1)}(E_0, 0, t) &= \frac{E_0}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s ds \\ &\times H_1(s+1) e^{\lambda_1(s+1)t} \left[\sum_{i=1}^N \frac{C_i(s+1)}{s} \right. \\ &\times \left\{ \frac{1}{\alpha_i(s+1)^s} - \frac{1}{(E_0/\varepsilon + \alpha_i(s+1))^s} \right\} \\ &- \sum_{i=1}^N \frac{C_i(s+1)\alpha_i(s+1)}{s+1} \\ &\times \left. \left\{ \frac{1}{\alpha_i(s+1)^{s+1}} - \frac{1}{(E_0/\varepsilon + \alpha_i(s+1))^{s+1}} \right\} \right]. \quad (1.8) \end{aligned}$$

計算の対象にする入射エネルギーをここでは $E_0/\varepsilon = 10^2 \sim 10^8$ とする。このとき(1.8)各{ }内の第 2 項は無視できて次式のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi_E^{(1)}(E_0, 0, t) &= \frac{E_0}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s \frac{ds}{s(s+1)} \\ &\times H_1(s+1) e^{\lambda_1(s+1)t} \sum_{i=1}^N C_i(s+1) \alpha_i(s+1)^{-s}. \quad (1.9) \end{aligned}$$

$\Pi_E^{(2)}(E_0, 0, t)$ も同様。よって、

$$\begin{aligned} \Pi_E(E_0, 0, t) &= \frac{E_0}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s \frac{ds}{s(s+1)} \\ &\times \{ H_1(s+1) e^{\lambda_1(s+1)t} \sum_{i=1}^N C_i(s+1) \alpha_i(s+1)^{-s} \\ &+ H_2(s+1) e^{\lambda_2(s+1)t} \sum_{i=1}^N D_i(s+1) \beta_i(s+1)^{-s} \}. \quad (1.10) \end{aligned}$$

(1.10)の 2 つの和は $K_1(s, -s), K_2(s, -s)$ と類似の構造をもつ。すなわち第 II 稿 § 1.2 の記述において、ベキ $-s$ を変えずにエイジを $s+1$ に置き換えれば、これらの和について同様の記述をすることができる。この類似性から上記の和はそれぞれ $K_1(s+1, -s), K_2(s+1, -s)$ と等価である。よって、

$$\Pi_E(E_0, 0, t) = \frac{E_0}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s \frac{ds}{s(s+1)} \times$$

$$\begin{aligned} &\times \{ H_1(s+1) K_1(s+1, -s) e^{\lambda_1(s+1)t} \\ &+ H_2(s+1) K_2(s+1, -s) e^{\lambda_2(s+1)t} \}. \quad (1.11) \end{aligned}$$

$K_1(s+1, -s), K_2(s+1, -s)$ の計算を次に行う。

2. エネルギー流の K - 関数

$K_1(s+1, -s), K_2(s+1, -s)$ の数値を Prony 内挿法⁵⁾を用いて計算する。

2.1. $K_1(s+1, -s)$ の計算とその数値

第 II 稿で求めた $K_1(s, -n)$ は次のようなものである：

$$\begin{aligned} K_1(s, 0) &= 1, \quad K_1(s, -1) = -\frac{\lambda'_1(s)}{H_1(s)}, \\ K_1(s, -n-1) &= -\frac{\lambda'_1(s)}{H_1(s)} \\ &\times \frac{\prod_{k=1}^n (\lambda_1(s) - \lambda_1(s-k)) (\lambda_1(s) - \lambda_2(s-k))}{(-1)^n n! (\lambda_1(s) + \sigma_0)^n}. \quad (2.1) \end{aligned}$$

これから、

$$\begin{aligned} K_1(2, -1) &= -\frac{\lambda'_1(2)}{H_1(2)} = 1.2854983, \\ K_1(3, -2) &= -\frac{\lambda'_1(3)}{H_1(3)} \\ &\times \frac{\prod_{k=1}^2 (\lambda_1(3) - \lambda_1(3-k)) (\lambda_1(3) - \lambda_2(3-k))}{(-1)^2 2! (\lambda_1(2) + \sigma_0)^2} \\ &= 1.6370306, \\ K_1(4, -3) &= -\frac{\lambda'_1(4)}{H_1(4)} \\ &\times \frac{\prod_{k=1}^3 (\lambda_1(4) - \lambda_1(4-k)) (\lambda_1(4) - \lambda_2(4-k))}{(-1)^3 3! (\lambda_1(4) + \sigma_0)^3} \\ &= 2.1866268. \end{aligned}$$

$K_1(s+1, -s)$ はこれらの補間から得られる。

$$(n!)^2 K_1(n+1, -n) = \sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n \quad (2.2)$$

とおき, $N=4$ として Prony 内挿法から求めた C_k, α_k の値を表 1 に示す。

C1	0.903200135	α 1	0.62942942
C2	0.094896053	α 2	6.98374282
C3	0.001898368	α 3	28.35428678
C4	5.44406E-06	α 4	81.01965336

表 1. Prony 内挿法から求めた係数

$0 \leq s \leq 3$ における補間値は次式から求められる。

$$K_1(s+1, -s) = \frac{\sum_{k=1}^4 C_k \alpha_k^s}{\Gamma(s+1)^2} \quad (2.3)$$

のグラフを図 1 に示す。

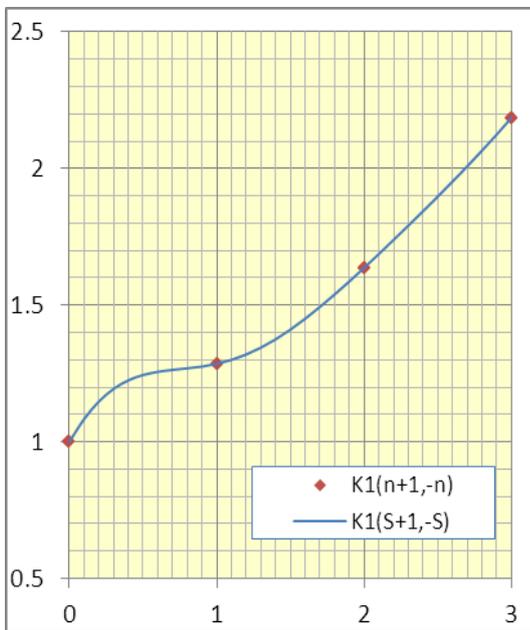


図 1. $K_1(n+1, -n)$ と $K_1(s+1, -s)$

2.2. $K_2(s+1, -s)$ の計算とその数値

第 II 稿で求めた $K_2(s, -n)$ は次のようなものである ;

$$K_2(s, 0) = 1, K_2(s, -1) = -\frac{\lambda_2'(s)}{H_2(s)},$$

$$K_2(s, -n-1) = -\frac{\lambda_2'(s)}{H_2(s)} \times$$

$$\times \frac{\prod_{k=1}^n (\lambda_2(s) - \lambda_1(s-k)) (\lambda_2(s) - \lambda_2(s-k))}{(-1)^n n! (\lambda_2(s) + \sigma_0)^n} \quad (2.4)$$

これから,

$$K_2(2, -1) = -\frac{\lambda_2'(2)}{H_2(2)} = 0.22945566,$$

$$K_2(3, -2) = -\frac{\lambda_2'(3)}{H_2(3)} \times \frac{(\lambda_2(3) - \lambda_1(2)) (\lambda_2(3) - \lambda_2(2))}{(-1) (\lambda_2(3) + \sigma_0)} = 0.072836546,$$

$$K_2(4, -3) = -\frac{\lambda_2'(4)}{H_2(4)} \times \frac{\prod_{k=1}^2 (\lambda_2(4) - \lambda_1(4-k)) (\lambda_2(4) - \lambda_2(4-k))}{(-1) (-2) (\lambda_2(4) + \sigma_0)^2} = 0.016463329.$$

$K_2(s+1, -s)$ はこれらの補間から求められる。

$$(n!)^2 K_2(n+1, -n) = \sum_{k=1}^N D_k \beta_k^n \quad (2.5)$$

とおく。 $N=4$ として Prony 内挿法から求めた D_k, β_k の値を表 2 に示す。

D1	0.843033819	β 1	0.04386099
D2	0.143336069	β 2	1.04939084
D3	0.013466742	β 3	3.04320452
D4	0.00016337	β 4	6.621529664

表 2. Prony 内挿法から求めた係数

$0 \leq s \leq 3$ における補間値は,

$$K_2(s+1, -s) = \frac{\sum_{k=1}^4 D_k \beta_k^s}{\Gamma(s+1)^2} \quad (2.6)$$

から求められる。そのグラフを図 2 に示す。

以上で $K_1(s+1, -s), K_2(s+1, -s)$ が求められた。

よって $\Pi_E(E_0, 0, t)$ の数値計算が可能になる。それを § 4 で行う。その前に飛跡長を考察する。

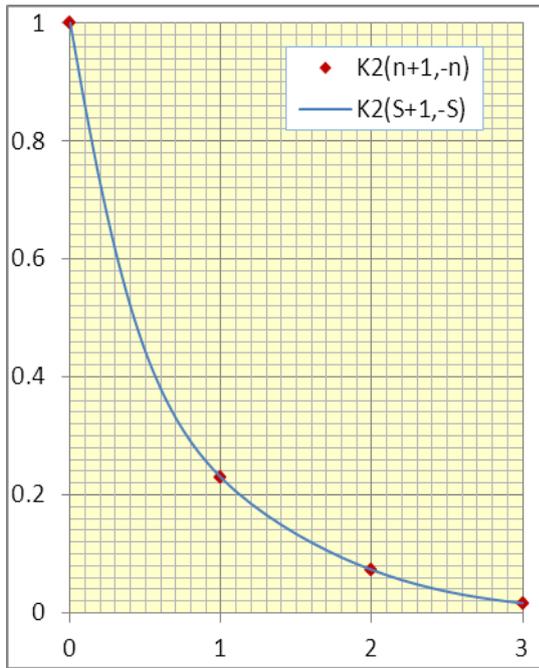


図 2. $K_2(n+1, -n)$ と $K_2(s+1, -s)$.

3. エネルギー流の飛跡長, $Z_E(E_0)$

$$Z_E(E_0) = \int_0^\infty dt \int_0^{E_0} E \pi(E_0, E, t) dE \quad (3.1)$$

で定義されるエネルギー流の飛跡長³⁾を求める。

(3.1)右辺は $\int_0^\infty \Pi_E(E_0, 0, t) dt$ であるから,

$$\begin{aligned} Z_E(E_0) &= -\frac{E_0}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s \frac{ds}{s(s+1)} \frac{H_1(s+1)K_1(s+1, -s)}{\lambda_1(s+1)} \\ &\quad - \frac{E_0}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s \frac{ds}{s(s+1)} \frac{H_2(s+1)K_2(s+1, -s)}{\lambda_2(s+1)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

留数定理を用いて積分を行う。

はじめに極を検討する：

(i) (3.2)右辺第 1 項は $s=0$ に 2 位の極をもつ

($\because \lambda_1(1)=0$) が, $s+1=0$ は極を与えない

($\because 1/\lambda_1(0)=0$)。

(ii) (3.2)右辺第 2 項は $s=0$ に 1 位の極をもつが,

$s+1=0$ は極を与えない ($\because 1/\lambda_2(0)=0$)。

積分を行う：

(i) $\lambda_1(s+1) = \lambda_1'(1)s + o(s)^2$ と展開すると,

(3.2)第 1 項の積分

$$\begin{aligned} &= -\frac{E_0}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s \frac{ds}{s+1} \frac{H_1(s+1)K_1(s+1, -s)}{\lambda_1'(1)s^2 + o(s)^3} \\ &= -\frac{E_0}{\lambda_1'(1)} \cdot \frac{d}{ds} \left\{ \frac{(E_0/\varepsilon)^s}{s+1} H_1(s+1)K_1(s+1, -s) \right\} \Big|_{s=0} \\ &= -\frac{E_0}{\lambda_1'(1)} \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s \frac{H_1(s+1)K_1(s+1, -s)}{s+1} \Big|_{s=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \left(\ln \frac{E_0}{\varepsilon} - \frac{1}{s+1} + \frac{H_1'(s+1)}{H_1(s+1)} + \frac{K_1'(s+1, -s)}{K_1(s+1, -s)} \right) \Big|_{s=0} \\ &= -\frac{H_1(1)}{\lambda_1'(1)} E_0 \left(\ln \frac{E_0}{\varepsilon} - 1 + \frac{H_1'(1)}{H_1(1)} + \frac{K_1'(1, 0)}{K_1(1, 0)} \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

(ii) (3.2)第 2 項の積分

$$\begin{aligned} &= -\frac{E_0}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s \frac{ds}{s(s+1)} \\ &\quad \times \frac{H_2(s+1)K_2(s+1, -s)}{\lambda_2(s+1)} \\ &= -E_0 \frac{H_2(1)K_2(1, 0)}{\lambda_2(1)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \frac{Z_E(E_0)}{E_0} &= -\frac{H_1(1)}{\lambda_1'(1)} \ln \frac{E_0}{\varepsilon} + \frac{H_1(1)}{\lambda_1'(1)} - \frac{H_1'(1)}{\lambda_1'(1)} \\ &\quad - \frac{H_1(1)K_1'(1, 0)}{\lambda_1'(1)K_1(1, 0)} - \frac{H_2(1)K_2(1, 0)}{\lambda_2(1)}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\lambda_1'(1) = -0.9908, \lambda_2(1) = -1.787,$$

$$H_1(1) = 0.4328, H_2 = 1 - H_1,$$

$$H_1'(1) = -0.2383, K_1(1, 0) = K_2(1, 0) = 1,$$

$$K_1'(1, 0) = 0.8303 \text{ を用いると,}$$

$$\frac{Z_E(E_0)}{E_0} = 0.4368 \ln \frac{E_0}{\varepsilon} + 0.0028. \quad (3.6)$$

ここでエネルギー流飛跡長と粒子数の飛跡長 (Total track length) ³⁾, $Z_{\Pi}(E_0) = E_0/\varepsilon$ との比,

$Z_E(E_0)/Z_{\Pi}(E_0)$, を求めると

表 3 および 図 3 のようになる。

E_0/ε	$Z_E(E_0)/Z_{\Pi}(E_0)$
1E+02	2.014ε
1E+04	4.026ε
1E+06	6.037ε
1E+08	8.049ε

表 3. $Z_E(E_0)/Z_{\Pi}(E_0)$ for E_0/ε

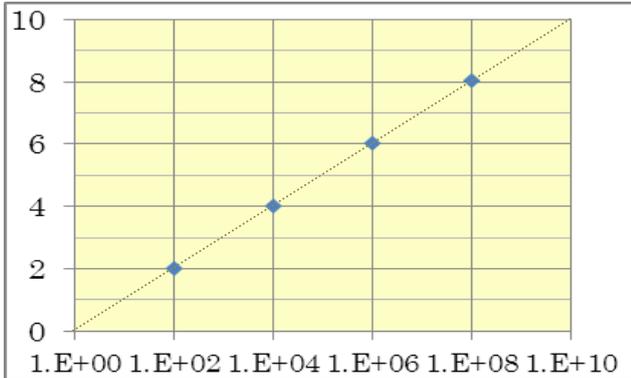


図 3. $Z_E(E_0)/Z_{\Pi}(E_0)$ vs. E_0/ε .

対数目盛に対して値がほぼ直線上にのることと, (3.6)の定数項(切片)がほぼ無視できることを図は示す。さらに直線の勾配は 1.005, すなわち, ほとんど 1 である。

以上をまとめると,

$$\frac{Z_E(E_0)}{\varepsilon Z_{\Pi}(E_0)} \simeq 0.4368 \ln \frac{E_0}{\varepsilon} \simeq \log \frac{E_0}{\varepsilon}. \quad (3.7)$$

図 3 にみるように, 飛跡長の比が E_0/ε の常用対数で表される。その理由は係数の 0.4368 が $\log(e)$ にほぼ等しいという偶然による(補遺)。

飛跡長が対数で表される理由は, 数学的には被積分関数 ((3.2)の第 1 項) が $s=0$ に 2 位の極をもつからである。他方, 次の大胆な物理的描像 ^{3),4)} す

なわち “どの粒子も 1 輻射長 ($\Delta t=1$) ごとに等エネルギーの 2 個の粒子に変化する。粒子数はある深さ T まで増加, 以後は 0 に急減する” というモデルからも対数項を導くことができる。その描像によれば

$$\Pi(t) = 2^t (t < T), \Pi(t) = 0 (t > T),$$

$$E(t) = E_0 2^{-t} \text{ と表されるから,}$$

$$Z_E(E_0) = \int_0^T E(t) \Pi(t) dt = E_0 T.$$

$$\text{一方, エネルギー保存則 ; } \varepsilon \int_0^T \Pi(t) dt = E_0$$

$$\text{から, } E_0/\varepsilon = \int_0^T 2^t dt = (2^T - 1)/\ln 2.$$

よって,

$$T = \frac{\ln(E_0/\varepsilon) + \ln(\ln 2 + \varepsilon/E_0)}{\ln 2} \simeq \frac{\ln(E_0/\varepsilon)}{\ln 2}.$$

ゆえに,

$$Z_E(E_0)/E_0 = T \propto \ln(E_0/\varepsilon).$$

4. エネルギー流積分スペクトル

エネルギー流の積分スペクトル(遷移曲線)の表式は次の通り;

$$\begin{aligned} & \Pi_E(E_0, 0, t)/E_0 \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s \frac{ds}{s(s+1)} \\ & \times \left(G_1(s) e^{\lambda_1(s+1)t} + G_2(s) e^{\lambda_2(s+1)t} \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} G_1(s) &= H_1(s+1)K_1(s+1), \\ G_2(s) &= H_2(s+1)K_2(s+1), \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

4.1. $G_1(s), G_2(s)$ のグラフ

$G_1(s), G_2(s)$ を 図 4 に示す。

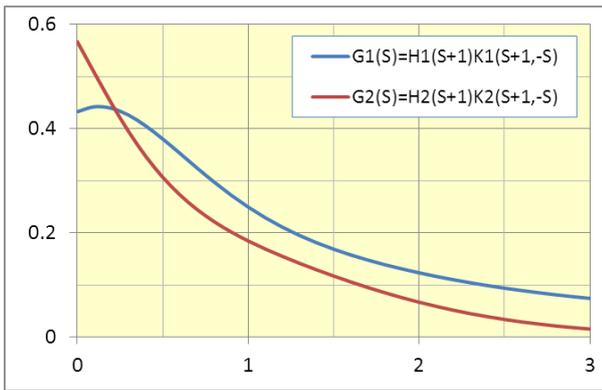


図 4. $G_1(s), G_2(s)$ vs. s

4.2. 鞍点法

(4.1)の積分を実行する。

$$\Pi_E(E_0, 0, t)/E_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_c \exp\{g(s, t)\} ds, \quad (4.3)$$

$$g(s, t) = s \ln \frac{E_0}{\varepsilon} - \ln(s(s+1)) + \lambda_1(s+1)t + \ln G_1(s) + \ln \left(1 + \frac{G_2(s)}{G_1(s)} e^{(\lambda_2(s+1) - \lambda_1(s+1))t} \right). \quad (4.4)$$

鞍点法^{3),4),6)}を適用すると,

$$\Pi_E(E_0, 0, t)/E_0 = \frac{e^{g(s_2, t)}}{\sqrt{2\pi g''(s_2, t)}}. \quad (4.5)$$

鞍点(エイジ) s_2 は $g'(s, t) = \partial g(s, t)/\partial s = 0$ の解 ;

$$g'(s, t) = \ln \frac{E_0}{\varepsilon} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \lambda_1'(s+1)t + \frac{G_1'(s)}{G_1(s)} + \frac{\left(\frac{G_2'(s)}{G_1(s)} \right)' + (\lambda_2'(s+1) - \lambda_1'(s+1))t \cdot \frac{G_2(s)}{G_1(s)}}{1 + \frac{G_2(s)}{G_1(s)} \cdot e^{(\lambda_2(s+1) - \lambda_1(s+1))t}} \times e^{(\lambda_2(s+1) - \lambda_1(s+1))t}. \quad (4.6)$$

$g'(s, t)$ や $g''(s, t)$ の中に現れる微分 ;

$G_i'(s), G_i''(s) (i=1, 2)$, は第II稿 § 4.1 脚注に示した方法で求める。

4.3. s_2 のグラフなど

$E_0/\varepsilon = 10^2 \sim 10^8$ に対して(4.6)で求めた $s_2 = s_2(t)$ を図 5 に示す。

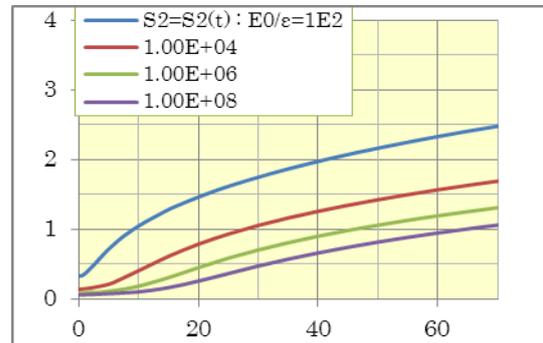


図 5. 鞍点 s_2 vs. t .

図 5 と, 第II稿・図 6 とから粒子数の鞍点 s_1 は $s_2 < s_1 < s_2 + 1$ を満たすことが分かる。 $E_0/\varepsilon = 10^2, 10^8$ の例を図 6-1, -2 に示す。

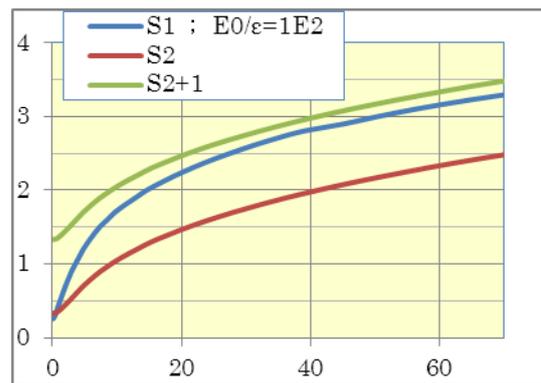


図 6-1. $s_1, s_2, s_2 + 1$ vs. t ($E_0/\varepsilon = 10^2$)

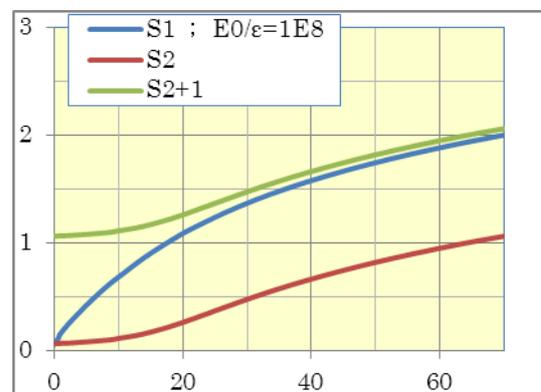


図 6-2. $s_1, s_2, s_2 + 1$ vs. t ($E_0/\varepsilon = 10^8$)

$\Pi_E(E_0, 0, t)$ のグラフは第IV稿に示す。

参考文献

- 1) J.habha, F.R.S.Chakrabarty, Proc.R.Soc.London (Ser.A, Math. And hys.) **181**(1943).
- 2) 新居誠彦, 足利工業大学研究集録 **53** 号 2018.3).
- 3) J.Nishimura, Handbuch der Physik. XLVI/2(1967),1.
- 4) B.Rossi, *High Energy Physics* (Englewood Cliffs, .H:Prentice-Hall, Inc., 1952),242.
- 5) 日高孝次, 数值積分法 (岩波書店, 1942) .
- 6) B.Rossi and K.Greisen, Rev.Mod.Phys. **13**(1941),240.

 ※) 足利大学名誉教授

補遺

$$-\frac{H_1(1)}{\lambda'_1(1)} \ln \frac{E_0}{\varepsilon} = \log \frac{E_0}{\varepsilon} \quad \text{の説明}$$

$$-H_1(1)/\lambda'_1(1) = 0.4368,$$

$$-\frac{H_1(1)}{\lambda'_1(1)} \ln \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{0.4368}{\log e} \log \frac{E_0}{\varepsilon}$$

$$= 1.0057 \log \frac{E_0}{\varepsilon} \simeq \log \frac{E_0}{\varepsilon}.$$

(相対誤差は - 0.57%) .

原稿受付日 平成 31 年 1 月 1 日