

# 電磁カスケード理論 B 近似エネルギー流遷移曲線の計算

## II. $K$ 関数と粒子数遷移曲線の計算

新居誠彦\*

Calculation of Transition Curves for Energy Flow under Approximation B  
in Electron-Photon Cascade Theory.

### II. Computation of $K$ -functions and Transition Curves.

Nobuhiko Nii

#### Abstract

We derive calculation formulae for so-called  $K$ -functions,  $K_1(s, -s)$  and  $K_2(s, -s)$ , with optional value of  $s$ , which appear in  $\Pi(E_0, 0, t)$ . Then we calculate the transition curves,  $\Pi(E_0, 0, t)$ , for some values of  $E_0$ , which are used in calculation of energy flow spectra for a single electron.

**Keywords:** *Electron-photon cascade theory, Approximation B, Energy flow of electron, Transition curve.*

#### はじめに

粒子数積分スペクトル  $\Pi(E_0, E, t)$  の表式を第 I 稿で得た。  $E \rightarrow 0$  とする表式  $\Pi(E_0, 0, t)$  の中に  $\sum_{i=1}^N C_i(s) \alpha_i(s)^{-s}$ ,  $\sum_{i=1}^N D_i(s) \beta_i(s)^{-s}$  という項が現れた。

本稿の目的は 2 つある。(i) 上の 2 項がいわゆる  $K$ -関数;  $K_1(s, -s)$ ,  $K_2(s, -s)$  と等価であることを示し, 任意の  $s$  に対する  $K$ -関数の計算式を求める。(ii)  $\Pi(E_0, 0, t)$  を数値計算して結果をグラフに示す。

1.  $\sum C_i(s) \alpha_i(s)^{-s} = K_1(s, -s)$  および

$\sum D_i(s) \beta_i(s)^{-s} = K_2(s, -s)$  の証明

第 I 稿 § 6.1 において,

$$\left. \begin{aligned} \rho_n(s) &= \prod_{k=1}^n \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{(\lambda_1(s) - \lambda_1(s+k))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s+k))}, \\ \rho_0(s) &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_n(s) &= \prod_{k=1}^n \frac{\lambda_2(s) + \sigma_0}{(\lambda_2(s) - \lambda_1(s+k))(\lambda_2(s) - \lambda_2(s+k))}, \\ \mu_0(s) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

を得た。かつ Prony 内挿法を用いて

$$n! \rho_n(s) = \sum_{i=1}^N C_i(s) \alpha_i(s)^n, \quad (1.1)'$$

$$n! \mu_n(s) = \sum_{i=1}^N D_i(s) \beta_i(s)^n \quad (1.2)'$$

と表した。

正の整数  $n$  を負の数へ拡張する ( $n \rightarrow -s$ ) と, これらがいわゆる  $K$ -関数に等しいことを証明する (§ 1, § 2)。

1.1.  $n!\rho_n(s) = K_1(s, n)$  の証明

$$n!\rho_n(s) = y_n(s), \quad y_0(s) = 1 \tag{1.3}$$

とおく。第 I 稿(6.3)から容易にわかるように、

$$\begin{aligned} & y_{n-1}(s) \\ &= \frac{(\lambda_1(s) - \lambda_1(s+n))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s+n))}{n(\lambda_1(s) + \sigma_0)} \\ & \times y_n(s), \quad \} \tag{1.4} \\ & y_0(s) = 1. \end{aligned}$$

(1.4)第 1 式, 右辺の分子は次のように書き換えられる : 1)

$$\begin{aligned} & (\lambda_1(s) - \lambda_1(s+n))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s+n)) \\ &= (\lambda_1(s) + A(s+n))(\lambda_1(s) + \sigma_0) \\ & - B(s+n)C(s+n). \end{aligned} \tag{1.5}$$

よって、

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda_1(s) + A(s+n) - \frac{B(s+n)C(s+n)}{\lambda_1(s) + \sigma_0} \right] \\ & \times y_n(s) = n y_{n-1}(s). \end{aligned} \tag{1.6}$$

漸化式(1.6)は Rossi-Greisen の与えた漸化式 2) ;

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda(s) + A(s+r) - \frac{B(s+r)C(s+r)}{\sigma_0 + \lambda(s)} \right] \\ & \times K(s, r) = r K(s, r-1) \end{aligned} \tag{1.7}$$

において、

$$\lambda(s) = \lambda_1(s), \quad K(s, r) = K_1(s, r),$$

$K_1(s, 0) = 1, \quad r = n$  とおいた式と同じものである。ゆえに

$$y_n(s) = K_1(s, n). \tag{1.8}$$

1.2.  $n!\mu_n(s) = K_2(s, n)$  の証明

$$n!\mu_n(s) = z_n(s) \tag{1.9}$$

とおく。第 I 稿(6.4)から容易にわかるように、

$$\begin{aligned} & z_{n-1}(s) \\ &= \frac{(\lambda_2(s) - \lambda_1(s+n))(\lambda_2(s) - \lambda_2(s+n))}{n(\lambda_2(s) + \sigma_0)} \\ & \times z_n(s), \quad \} \tag{1.10} \\ & z_0(s) = 1. \end{aligned}$$

(1.10)第 1 式, 右辺の分子は次のように書き換えられる : 1)

$$\begin{aligned} & (\lambda_2(s) - \lambda_1(s+n))(\lambda_2(s) - \lambda_2(s+n)) \\ &= (\lambda_2(s) + A(s+n))(\lambda_2(s) + \sigma_0) \\ & - B(s+n)C(s+n). \end{aligned} \tag{1.11}$$

よって、

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda_2(s) + A(s+n) - \frac{B(s+n)C(s+n)}{\lambda_2(s) + \sigma_0} \right] \\ & \times z_n(s) = n z_{n-1}(s). \end{aligned} \tag{1.12}$$

漸化式(1.12)は上述の Rossi-Greisen の与えた漸化式において、 $\lambda(s) = \lambda_2(s), \quad K(s, r) = K_2(s, r),$

$K_2(s, 0) = 1, \quad r = n$  とおいた式と同じものである。ゆえに

$$z_n(s) = K_2(s, n). \tag{1.13}$$

(1.1)', (1.3), (1.8)から(1.14)が成立し、

$$\sum_{i=1}^N C_i(s) \alpha_i(s)^n = K_1(s, n), \tag{1.14}$$

(1.2)', (1.9), (1.13)から(1.15)が成立する。

$$\sum_{i=1}^N D_i(s) \beta_i(s)^n = K_2(s, n). \tag{1.15}$$

1.3. 負の整数に対して

漸化式(1.7)は負の整数  $-r$  に対しても成り立ち

$K(s, -r)$  が存在する。よって、

$$K_1(s, -n) = \sum_{i=1}^N C_i(s) \alpha_i(s)^{-n}, \tag{1.16}$$

$$K_2(s, -n) = \sum_{i=1}^N D_i(s) \beta_i(s)^{-n} \quad (1.17)$$

の関係が成り立つ。

### 2. K - 関数との等価性

$\Pi(E_0, 0, t)$  の中に現れる表式 ;

$$\sum_{i=1}^N C_i(s) \alpha_i(s)^{-s}, \sum_{i=1}^N D_i(s) \beta_i(s)^{-s} \text{ は各々,}$$

(1.16), (1.17) において整数  $n$  を非整数の  $s$  へ内挿したものである。いわゆる  $K$  - 関数も同じく整数から非整数へ内挿して値を求める。<sup>2), 3), 4)</sup> ゆえに次式の成立が証明された。

$$\sum_{i=1}^N C_i(s) \alpha_i(s)^{-s} = K_1(s, -s), \quad (2.1)$$

$$\sum_{i=1}^N D_i(s) \beta_i(s)^{-s} = K_2(s, -s). \quad (2.2)$$

### 3. K - 関数の計算

$K$  - 関数の値は(1.14), (1.15) の  $n$  を  $-s$  へ外挿すれば原理的に求められる。しかし Prony 内挿法が "外挿" にも適するとは限らない。実際,

$N=13$  として  $K_1(1, -1)$  を  $\sum_{i=1}^N C_i(1) \alpha_i(1)^{-1}$  から求めたところ Rossi-Greisen の与えた値 2.29 に対して 2.19 であった。-4.5% の相対誤差は大きいと著者には思われる。そのため数値計算にお

いては  $K_1(s, -s)$  および  $K_2(s, -s)$  の値を, Prony 内挿法からではなく, 漸化式(1.4)および(1.10)から直接求めることにする。

#### 3.1. $K_1(s, n)$ 関数の計算

漸化式(1.4)から  $y_{-1}(s), y_{-2}(s), \dots$  が順次計算できる。

$$y_{-1}(s) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(\lambda_1(s) - \lambda_1(s+n))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s+n))}{n(\lambda_1(s) + \sigma_0)}$$

$$\begin{aligned} & \times y_0(s) \\ & = -\lambda_1'(s) \frac{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}{\lambda_1(s) + \sigma_0} \times 1 = -\frac{\lambda_1'(s)}{H_1(s)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & y_{-2}(s) \\ & = \frac{(\lambda_1(s) - \lambda_1(s-1))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s-1))}{(-1)(\lambda_1(s) + \sigma_0)} y_{-1}(s), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & y_{-3}(s) \\ & = \frac{(\lambda_1(s) - \lambda_1(s-2))(\lambda_1(s) - \lambda_2(s-2))}{(-2)(\lambda_1(s) + \sigma_0)} y_{-2}(s). \end{aligned} \quad (3.3)$$

数値は次の通り ;

$$y_0(s) = 1, \quad (3.4)$$

$$y_{-1}(1) = -\frac{\lambda_1'(1)}{H_1(1)} y_0(1) = 2.28945, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} & y_{-2}(2) = \frac{(\lambda_1(2) - \lambda_1(1))(\lambda_1(2) - \lambda_2(1))}{(-1)(\lambda_1(2) + \sigma_0)} \\ & \times \left( -\frac{\lambda_1'(2)}{H_1(2)} \right) y_0(2) = 3.45191, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & y_{-3}(3) = \frac{(\lambda_1(3) - \lambda_1(2))(\lambda_1(3) - \lambda_1(1))}{(-1)(-2)(\lambda_1(3) + \sigma_0)^2} \\ & \times (\lambda_1(3) - \lambda_2(2))(\lambda_1(3) - \lambda_2(1)) \\ & \times \left( -\frac{\lambda_1'(3)}{H_1(3)} \right) y_0(3) = 5.98513. \end{aligned} \quad (3.7)$$

これらの値が  $K_1(n, -n)$  を与える。

非整数に対する値  $K_1(s, -s)$  は補間値として求められる。Prony 内挿法を用いて,

$$(n!)^2 K_1(n, -n) = \sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n \quad (3.8)$$

と表す。  $N=4$  としたときの係数  $C_k, \alpha_k$  の値を表 1 に示す。

C1	9.1892844.E-01	$\alpha$ 1	1.5044994
C2	7.9033803.E-02	$\alpha$ 2	10.484590
C3	2.0296637.E-03	$\alpha$ 3	38.168013
C4	8.0924889.E-06	$\alpha$ 4	101.21355

表 1. Prony 法による係数  $C_k, \alpha_k$

補間値は次式で計算できる。

$$K_1(s, -s) = \sum_{k=1}^4 C_k \alpha_k^s / \Gamma(s+1)^2. \quad (3.9)$$

$K_1(s, -s)$ ,  $0 \leq s \leq 3$ , を図 1 に示す。

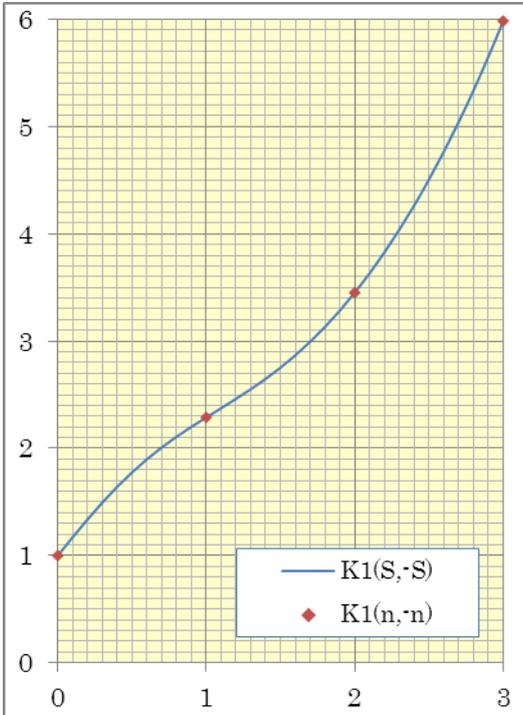


図 1.  $K_1(n, -n)$  と  $K_1(s, -s)$

### 1.2. $K_2(s, -s)$ 関数の計算

漸化式(1.10)から  $z_{-1}(s), z_{-2}(s), \dots$  が順次計算できる。

$$\begin{aligned} z_{-1}(s) &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(\lambda_2(s) - \lambda_1(s+n))(\lambda_2(s) - \lambda_2(s+n))}{n(\lambda_2(s) + \sigma_0)} z_0(s) \\ &= -\lambda_2'(s) \frac{\lambda_2(s) - \lambda_1(s)}{\lambda_2(s) + \sigma_0} \times 1 = -\frac{\lambda_2'(s)}{H_2(s)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} z_{-2}(s) &= \frac{(\lambda_2(s) - \lambda_1(s-1))(\lambda_2(s) - \lambda_2(s-1))}{(-1)(\lambda_2(s) + \sigma_0)} z_{-1}(s), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} z_{-3}(s) &= \frac{(\lambda_2(s) - \lambda_1(s-2))(\lambda_2(s) - \lambda_2(s-2))}{(-2)(\lambda_2(s) + \sigma_0)} \\ &\times z_{-2}(s). \end{aligned} \quad (3.12)$$

数値は次の通り ;

$$z_0(s) = 1, \quad (3.13)$$

$$z_{-1}(1) = -\frac{\lambda_2'(1)}{H_2(1)} z_0(1) = -0.55483697, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} z_{-2}(2) &= \frac{(\lambda_2(2) - \lambda_1(1))(\lambda_2(2) - \lambda_2(1))}{(-1)(\lambda_2(2) + \sigma_0)} \\ &\times \left( -\frac{\lambda_2'(2)}{H_2(2)} \right) z_0(2) = 0.004237453, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} z_{-3}(3) &= \frac{(\lambda_2(3) - \lambda_1(2))(\lambda_2(3) - \lambda_1(1))}{(-1)(-2)(\lambda_2(3) + \sigma_0)^2} \\ &\times (\lambda_2(3) - \lambda_2(2))(\lambda_2(3) - \lambda_2(1)) \\ &\times \left( -\frac{\lambda_2'(3)}{H_2(3)} \right) z_0(3) = 0.01409346. \end{aligned} \quad (3.16)$$

これらの値が  $K_2(n, -n)$  を与える。

非整数に対する値,  $K_2(s, -s)$ , は補間値から求められる。Prony 内挿法を用いて,

$$n! K_2(n, -n) = \sum_{k=1}^N D_k \beta_k^n \quad (3.17)$$

と表す。  $N = 4$  としたときの係数  $D_k, \beta_k$  を表 2 に示す。

D1	2.7159003.E+01	$\beta_1$	0.2838176
D2	-6.6849641.E+01	$\beta_2$	0.4612809
D3	5.5493153.E+01	$\beta_3$	0.6107199
D4	-1.4802515.E+01	$\beta_4$	0.7645559

表 2. Prony 法による係数  $D_k, \beta_k$

これから  $K_2(s, -s)$  が次式で求められる。

$$K_2(s, -s) = \sum_{k=1}^4 D_k \beta_k^s / \Gamma(s+1). \quad (3.18)$$

$K_2(s, -s)$  のグラフを 図 2 に示す。

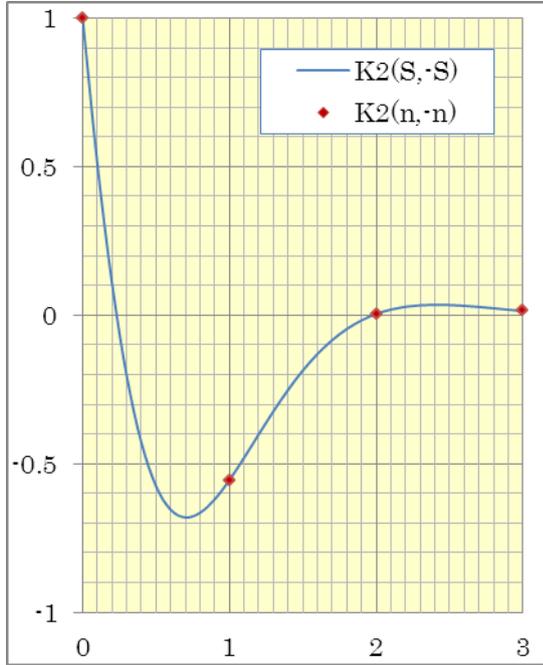


図 2.  $K_2(n, -n)$  と  $K_2(s, -s)$

ところで  $0.23 \leq s \leq 1.97$  の範囲で  $K_2$  関数は負の

値をもつ。理由は、 $K_2(1, -1)$  の符号、すなわち

(3.14)における  $-\lambda'_2(1)$  の符号が負だからである。

図 3 に示すように  $\lambda_2(s)$  は上に凸の関数で

$s \simeq 1.4$  に最大値をもつ。

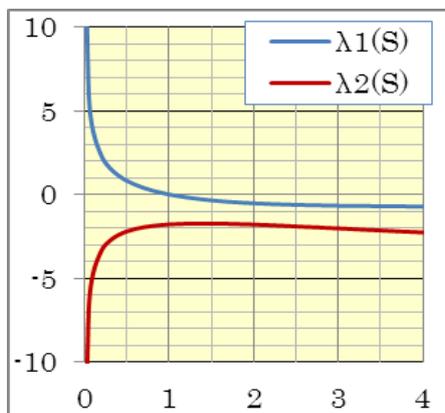


図 3.  $\lambda_1(s), \lambda_2(s)$  vs.  $s$ .

したがって  $\lambda'_2(s)$  は  $s \simeq 1.4$  を境に符号が変化し

$s = 1$  では  $-\lambda'_2(1) < 0$  となるからである。 $K_2(s, -s)$

に負の値が現れるのは必然性がある。

## 2. $\Pi(E_0, 0, t)$ の数値計算とグラフ

閾値  $E = 0$  の積分スペクトルは、

$$\Pi(E_0, 0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \left( \frac{E_0}{\varepsilon} \right)^s \frac{ds}{s} \times \left( H_1(s) K_1(s, -s) e^{\lambda_1(s)t} + H_2(s) K_2(s, -s) e^{\lambda_2(s)t} \right). \quad (4.1)$$

第Ⅲ稿以降で単位電子のエネルギー流を求める。

そのためここでは極めて浅い領域  $t = 0.01 \sim 0.1$

をも対象にする。その必要から、 $t \geq 1$  ではふつう

無視される(4.1)右辺第 2 項を含めた計算を行う。

### 4.1. 鞍点法

$s$  - 積分を鞍点法<sup>1),2),3)</sup> で実行する。ところで

$K_2(s, -s) < 0$  となる、ある範囲の  $s$  が存在する

(図 2)。それが負の粒子数を与えることはない  
だろうか？ はじめに検討しておく。

$K$  - 関数は  $H$  - 関数と対になって現れる。

$H_1(s) K_1(s, -s), H_2(s) K_2(s, -s)$  を 図 4 に示す。

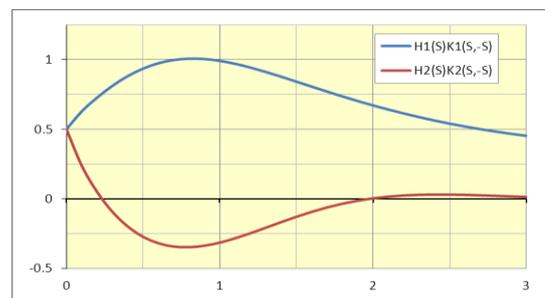


図 4.  $H_1(s) K_1(s, -s), H_2(s) K_2(s, -s)$

$|H_2 K_2| < H_1 K_1$  であることが分かる。加えて

$e^{\lambda_2 t} < e^{\lambda_1 t}$  である (図 3) から、(4.1)括弧内の和  
は非負が保証される。つまり、粒子数が負になる

ことはありなない。

さて、 $s$  - 積分を実行する。

$$\begin{aligned} \Pi(E_0, 0, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c ds \exp\left\{ \ln\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right) - \ln s \right. \\ &+ \ln(H_1(s)K_1(s, -s)) + \lambda_1(s)t \\ &+ \left. \ln\left(1 + \frac{H_2(s)K_2(s, -s)}{H_1(s)K_1(s, -s)} e^{(-\lambda_1(s) + \lambda_2(s))t}\right) \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

と書き換える。指数部分を  $f(s, t)$  と記す。

$$\frac{\partial f(s, t)}{\partial s} = f'(s, t) = 0 \text{ を満たす } s \text{ を } s_1 \text{ (鞍点。エ}$$

イジとも呼ぶ) とし、 $f(s, t)$  を  $s_1$  の周りで展開する。

$$f(s, t) \simeq f(s_1, t) + \frac{1}{2} f''(s_1, t) (s - s_1)^2.$$

(4.2) の積分を  $I$  と記す。

$$I \simeq \int_c e^{f(s_1, t) + \frac{1}{2} f''(s_1, t) (s - s_1)^2} ds.$$

積分路  $c$  を、 $s_1$  を通り虚軸に平行な直線にとる。この直線上で  $s = s_1 + i\sigma$  ( $-\infty < \sigma < \infty$ ) と表される。ガウス積分により、

$$\begin{aligned} I &= e^{f(s_1, t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} f''(s_1, t) \sigma^2} i d\sigma \\ &= i e^{f(s_1, t)} \sqrt{\frac{2\pi}{f''(s_1, t)}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

よって、

$$\begin{aligned} \Pi(E_0, 0, t) &= \left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s \frac{1}{s} \frac{H_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + H_2 K_2 e^{\lambda_2 t}}{\sqrt{2\pi f''(s, t)}} \Big|_{s=s_1}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

※)  $H_1(s)K_1(s, -s)$  や  $A(s, t)$  の微分には、それを近似した多項式に微分を適用した。例えば、

$$H_1(s)K_1(s, -s) = \sum_{k=0}^N a_k s^k \quad (N=6) \text{ と表し、} (H_1 K_1)' = \sum_{k=1}^N k a_k s^{k-1}, \quad (H_1 K_1)'' = \sum_{k=2}^N k(k-1) a_k s^{k-2}.$$

$$\begin{aligned} f'(s, t) &= \ln \frac{E_0}{\varepsilon} - \frac{1}{s} + \frac{(H_1 K_1)'}{H_1 K_1} \\ &+ \lambda_1'(s)t + \frac{A'(s, t)}{A(s, t)}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} f''(s, t) &= \frac{1}{s^2} + \left( \frac{(H_1 K_1)'}{H_1 K_1} \right)' \\ &+ \lambda_1''(s)t + \left( \frac{A'(s, t)}{A(s, t)} \right)', \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} A(s, t) &= 1 + \frac{H_2(s)K_2(s, -s)}{H_1(s)K_1(s, -s)} e^{(\lambda_2(s) - \lambda_1(s))t}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

$A(s, t)$  を図 5 に示す。

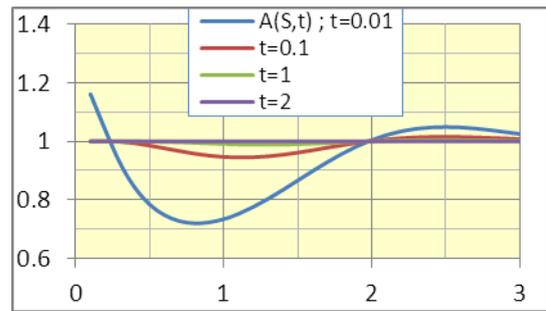


図 5.  $A(s, t)$  vs.  $s$ .

図は  $t \geq 1$  で  $A(s, t) \simeq 1$  を示す。すなわち

$$H_2(s)K_2(s, -s) e^{(\lambda_2(s) - \lambda_1(s))t} \simeq 0 \text{ である。つまり}$$

(4.1) の括弧内第 2 項は  $t \geq 1$  で無視できる。

#### 4.2. 鞍点の値

$$f'(s, t) = 0 \text{ から求めた鞍点 (エイジ) の値 } s_1(t)$$

を図 6 に示す。

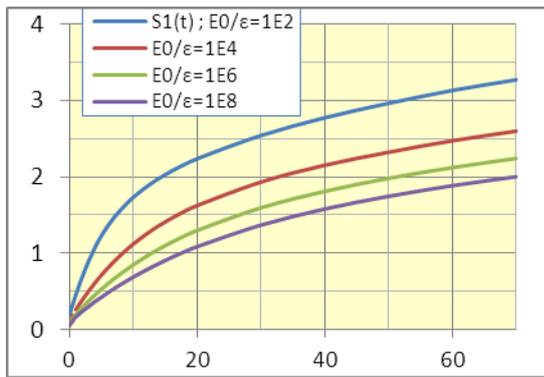


図 6. 鞍点  $s_1$  vs.  $t$ .

### 4.3. 粒子数遷移曲線

$E_0/\varepsilon = 10^2, 10^4, 10^6, 10^8$  について(4.4)から求

めた  $\Pi(E_0, 0, t)$  を図 7 に示す。

第Ⅲ稿以降でエネルギー流の積分スペクトル

(エネルギー流遷移曲線)  $\Pi_E(E_0, 0, t)$  を求める。

$\Pi(E_0, 0, t)$  は, 単位電子あたりのエネルギー流

$e_E(E_0, 0, t) = \Pi_E(E_0, 0, t) / \Pi(E_0, 0, t)$ , を計算する際に使用する。

### 参考文献

- 1) 新居誠彦, 足利工業大学研究集録第 51 号 (2017.3).
- 2) B.Rossi and K.Greisen, Rev.Mod.Phys. **13**(1941),240.
- 3) B.Rossi, *High Energy Physics*(Englewood Cliffs, N.J:Prentice-Hall,Inc.,1952).
- 4) J. Nishimura, *Handbuch der Physik*, **XLVI/2**(1967),1.

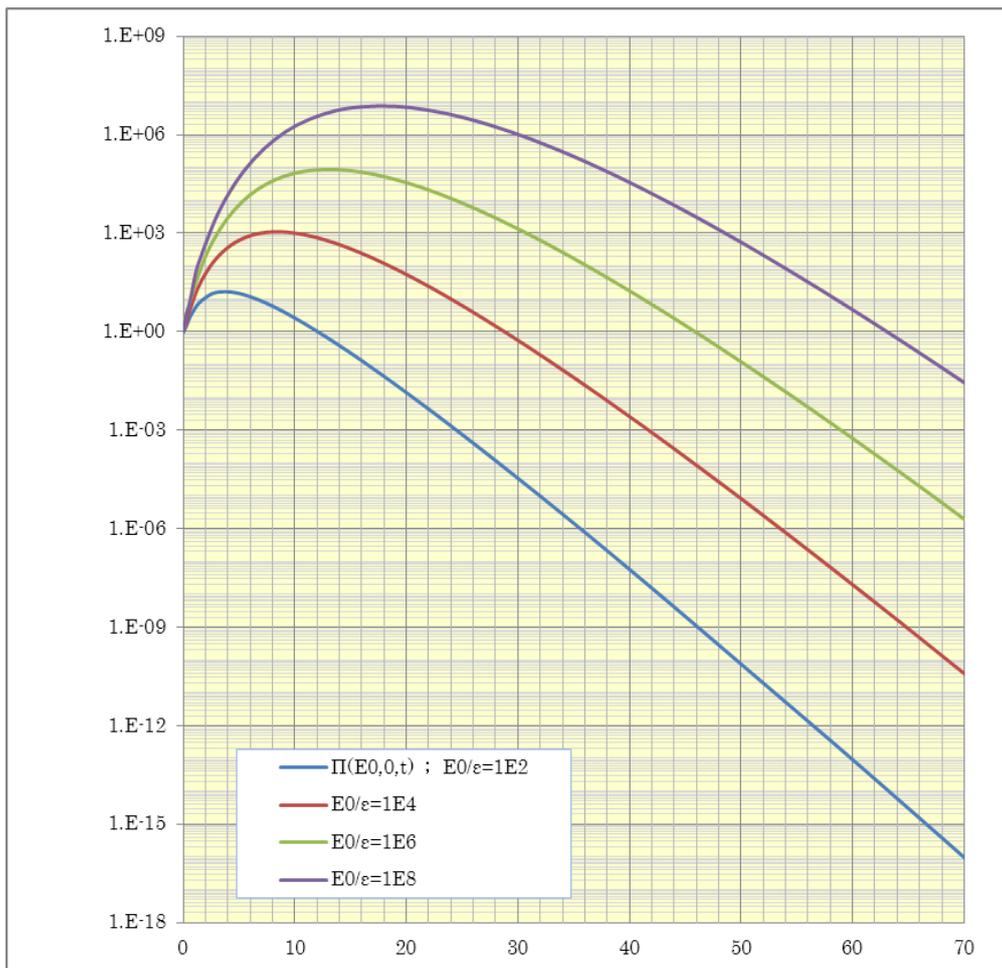


図 7. 電子数積分スペクトル遷移

※) 足利大学名誉教授