電磁カスケード理論 B 近似エネルギー流遷移曲線の計算

Ⅰ．B 近似電子数積分スペクトルの計算

新居誠彦※

Calculation of Transition Curves for Energy Flow under Approximation B
in Electron-Photon Cascade Theory.
Ⅰ. Calculation of Integral Number Spectra for Electron Component.

Nobuhiko Nii

Abstract

By using Suzuki-Trotter formula and Prony's interpolation method, we obtain the solution of the diffusion equation under Approximation B in electron-photon cascade theory. We calculate the integral number spectra of electron; $\Pi\left(E_0,E,t\right)$ and $\Pi\left(E_0,0,t\right)$ in Ⅰ,Ⅱ. And we calculate, in Ⅲ, the integral energy flow spectrum of electron; $\Pi_E\left(E_0,0,t\right)$, then we obtain, in Ⅳ, average energy flow for a single electron; $e_E\left(E_0,0,t\right)=\Pi_E\left(E_0,0,t\right)/\Pi\left(E_0,0,t\right)$.

Keywords: *Electron-photon cascade theory, Approximation B, Energy flow of electron, Transition curve.*

はじめに

電磁カスケード B 近似理論におけるエネルギー流遷移曲線を計算する。先達の定式化とは異なる数学的方法を用いて先達と同じ粒子数遷移曲線が得られることを示し(本稿)，第Ⅱ稿でそれの数値計算を行う。第Ⅲ稿以降で(i)電子成分と(ii)単位電子とのエネルギー流遷移曲線を計算する。粒子数遷移曲線は(ii)で使用する。

1. 拡散方程式

電磁カスケード理論における B 近似 1 次元拡散方程式は次の通り：1),2),3)

$$\partial\pi\left(E,t\right)/\partial t$$
$$=-A'\pi\left(E,t\right)+B'\gamma\left(E,t\right)+\varepsilon\,\partial\pi\left(E,t\right)/\partial E, \quad (1.1)$$

$$\partial\gamma\left(E,t\right)/\partial t$$
$$=C'\pi\left(E,t\right)-\sigma_0\gamma\left(E,t\right). \quad (1.2)$$

$\pi\left(E,t\right)dtdE\cdot\gamma\left(E,t\right)dtdE$ は，媒質の深さ($t\sim t+dt$)でエネルギー($E\sim E+dE$)をもつ電子･光子の個数を表す。$-A',B',\varepsilon\partial/\partial E,C',-\sigma_0$ は粒子数変化を記述する演算子，すなわち，$-A'\pi$ は輻射による電子数の変化，$B'\gamma$ は対創生によって生じる電子数，$\varepsilon\partial\pi/\partial E$ は電離損失による電子数の変化を表す（この項を無視する近似を A 近似と呼ぶ）。$C'\pi$ は輻射によって生じる光子数，$-\sigma_0\gamma$ は対創生による光子数の吸収を表す。拡散方程式を解くための準備を§2 で行う。

2. 拡散方程式を解くための準備

2.1. メリン変換

拡散方程式をメリン変換 1),2),3) すると演算子 A', B', C' の演算が実行される。

与えられた関数 $f(x)$ のメリン変換は，s を複素数として次式で定義される；

$$\int_0^\infty x^s f(x)dx = \mathfrak{M}_f(s). \tag{2.1}$$

微分 $df(x)/dx$ のメリン変換は

$$\int_0^\infty x^s \frac{df(x)}{dx}dx = -s\,\mathfrak{M}_f(s-1). \tag{2.2}$$

逆変換は,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\mathfrak{M}_f(s)}{x^{s+1}}ds. \tag{2.3}$$

ここで積分路 c は収束領域で虚軸に平行な直線とする。

$$\int_0^\infty E^s \pi(E,t)dE = \mathfrak{M}_\pi(s,t),$$

$$\int_0^\infty E^s \gamma(E,t)dE = \mathfrak{M}_\gamma(s,t)$$

と記すと,

$$\int_0^\infty E^s A'\pi(E,t)dE = A(s)\mathfrak{M}_\pi(s,t),$$

$$\int_0^\infty E^s B'\gamma(E,t)dE = B(s)\mathfrak{M}_\gamma(s,t),$$

$$\int_0^\infty E^s C'\pi(E,t)dE = C(s)\mathfrak{M}_\pi(s,t),$$

$$\int_0^\infty E^s \frac{\partial\pi(E,t)}{\partial E}dE = -s\mathfrak{M}_\pi(s-1,t).$$

$A(s), B(s), C(s)$ はカスケード理論でよく知られた関数である。1),2),3)

拡散方程式はメリン変換によって次の差分微分方程式になる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_\pi(s,t)\\ \mathfrak{M}_\gamma(s,t)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-A(s) & B(s)\\ C(s) & -\sigma_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_\pi(s,t)\\ \mathfrak{M}_\gamma(s,t)\end{pmatrix}$$

$$-s\varepsilon\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_\pi(s-1,t)\\ \mathfrak{M}_\gamma(s-1,t)\end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

2.2. 差分演算子，ずらし演算子の導入

差分項を扱うため，変数 s の関数，$a(s)$，に演算する差分演算子 Δ を定義する；

$$\Delta a(s) = a(s) - a(s-1). \tag{2.5}$$

このとき

$$(1-\Delta)a(s) = a(s-1) \tag{2.6}$$

となるから $1-\Delta$ を“ずらし演算子”とここでは呼ぶ。これを用いると(2.4)は次式で表される。

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_\pi(s,t)\\ \mathfrak{M}_\gamma(s,t)\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}-A(s) & B(s)\\ C(s) & -\sigma_0\end{pmatrix}\right.$$

$$\left. -s\varepsilon\begin{pmatrix}1-\Delta & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_\pi(s,t)\\ \mathfrak{M}_\gamma(s,t)\end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

簡単のために次の略記を導入する：

$$\begin{pmatrix}-A(s) & B(s)\\ C(s) & -\sigma_0\end{pmatrix} = P(s), \tag{2.8}$$

$$-s\varepsilon\begin{pmatrix}1-\Delta & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = Q(s). \tag{2.9}$$

拡散方程式は次式のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_\pi(E,t)\\ \mathfrak{M}_\gamma(E,t)\end{pmatrix}$$

$$= \left(P(s)+Q(s)\right)\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_\pi(s,t)\\ \mathfrak{M}_\gamma(s,t)\end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

3. 鈴木-Trotter 公式を用いて解を求める

微分方程式(2.10)において $P(s)$ と $Q(s)$ は非可換である；$P(s)Q(s) \neq Q(s)P(s)$.

このとき解は鈴木-Trotter の公式 4),5) を用いて表すことができる；

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_\pi(E,t)\\ \mathfrak{M}_\gamma(E,t)\end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_\pi(s,t)\\ \mathfrak{M}_\gamma(s,t)\end{pmatrix}_n, \tag{3.1}$$

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_\pi(s,t)\\ \mathfrak{M}_\gamma(s,t)\end{pmatrix}_n$$

$$=\left(e^{P(s)\Delta t}\,e^{Q(s)\Delta t}\right)^n\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_\pi(s,0)\\ \mathfrak{M}_\gamma(s,0)\end{pmatrix},\ \Delta t=t/n. \qquad (3.2)$$

初期条件を，1 次エネルギー E_0, W_0 の電子，光子の同時入射とする。

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_\pi(s,0)\\ \mathfrak{M}_\gamma(s,0)\end{pmatrix}$$

$$=\int_0^\infty E^s\begin{pmatrix}\delta(E-E_0)\\ \delta(E-W_0)\end{pmatrix}dE=\begin{pmatrix}E_0{}^s\\ W_0{}^s\end{pmatrix}. \qquad (3.3)$$

よって，

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{M}_\pi(s,t)\\ \mathfrak{M}_\gamma(s,t)\end{pmatrix}=\lim_{n\to\infty}\left(e^{P(s)\Delta t}\,e^{-s\varepsilon(1-\Delta)Q_0\Delta t}\right)^n\begin{pmatrix}E_0{}^s\\ W_0{}^s\end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$Q_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}. \qquad (3.5)$$

(3.4)をメリン逆変換すれば粒子数微分スペクトル(π,γ)が得られる。

$$\begin{pmatrix}\pi(E,t)\\ \gamma(E,t)\end{pmatrix}=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{ds}{E^{s+1}}$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\left(e^{P(s)\Delta t}\,e^{-s\varepsilon(1-\Delta)Q_0\Delta t}\right)^n\begin{pmatrix}E_0{}^s\\ W_0{}^s\end{pmatrix}. \qquad (3.6)$$

4. 指数行列の展開とずらし演算子の実行

(3.6)右辺の指数行列を展開する。

$$\left(e^{P(s)\Delta t}\,e^{-s\varepsilon(1-\Delta)Q_0\Delta t}\right)^n\begin{pmatrix}E_0{}^s\\ W_0{}^s\end{pmatrix}$$

$$=\{\,e^{P(s)t}+\sum_{i=0}^n e^{P(s)(t-t_i)}\left(-s\varepsilon(1-\Delta)Q_0\right)\Delta t\,e^{P(s)t_i}$$

$$+\sum_{i=0}^n e^{P(s)(t-t_i)}\left(-s\varepsilon(1-\Delta)Q_0\right)\Delta t$$

$$\times\sum_{j=0}^i e^{P(s)(t_i-t_j)}\left(-s\varepsilon(1-\Delta)Q_0\right)\Delta t\,e^{P(s)t_j}+\cdots\}$$

$$\times\begin{pmatrix}E_0{}^s\\ W_0{}^s\end{pmatrix}. \qquad (4.1)$$

ずらし演算子の演算を実行すると

$$\left(e^{P(s)\Delta t}\,e^{-s\varepsilon(1-\Delta)Q_0\Delta t}\right)^n\begin{pmatrix}E_0{}^s\\ W_0{}^s\end{pmatrix}=e^{P(s)t}\begin{pmatrix}E_0{}^s\\ W_0{}^s\end{pmatrix}$$

$$+\sum_{i=0}^n e^{P(s)(t-t_i)}\left(-s\varepsilon Q_0\right)\Delta t\,e^{P(s-1)t_i}\begin{pmatrix}E_0{}^{s-1}\\ W_0{}^{s-1}\end{pmatrix}$$

$$+\sum_{i=0}^n e^{P(s)(t-t_i)}\left(-s\varepsilon Q_0\right)\Delta t\sum_{j=0}^i e^{P(s-1)(t_i-t_j)}$$

$$\times\left(-(s-1)\varepsilon Q_0\right)\Delta t\,e^{P(s-2)t_j}\begin{pmatrix}E_0{}^{s-2}\\ W_0{}^{s-2}\end{pmatrix}+\cdots. \qquad (4.2)$$

ここで $Z_0=E_0$ または W_0 とし，ベクトル中の $Z_0{}^{-1}, Z_0{}^{-2},\cdots$ を数式の中へ繰り込むと，

(4.2)式$=$

$$=\{\,e^{P(s)t}+\sum_{i=0}^n e^{P(s)(t-t_i)}\left(-s\frac{\varepsilon}{Z_0}Q_0\right)\Delta t\,e^{P(s-1)t_i}$$

$$+\sum_{i=0}^n e^{P(s)(t-t_i)}\left(-s\frac{\varepsilon}{Z_0}Q_0\right)\Delta t\sum_{j=0}^i e^{P(s-1)(t_i-t_j)}$$

$$\times\left(-(s-1)\frac{\varepsilon}{Z_0}Q_0\right)\Delta t\,e^{P(s-2)t_j}+\cdots\}\begin{pmatrix}E_0{}^s\\ W_0{}^s\end{pmatrix}. \qquad (4.3)$$

$n\to\infty$ とすると(4.3)右辺における $i,j,\cdots$ の和は積分で表されて，

(4.3)の{ }

$$=e^{P(s)t}+s\left(-\frac{\varepsilon}{Z_0}\right)\int_0^t e^{P(s)(t-t')}Q_0\,e^{P(s-1)t'}\,dt'$$

$$+s(s-1)\left(-\frac{\varepsilon}{Z_0}\right)^2\int_0^t e^{P(s)(t-t')}Q_0dt'$$

$$\times\int_0^{t'} e^{P(s-1)(t'-t'')}Q_0\,e^{P(s-2)t''}\,dt''+\cdots. \qquad (4.4)$$

5. メリン逆変換と s の原点移動

(4.4)をメリン逆変換する。

$$\begin{pmatrix}\pi(E,t)\\ \gamma(E,t)\end{pmatrix}=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{ds}{E^{s+1}}\{\ \mathrm{e}^{P(s)t}$$

$$+s\left(-\frac{\varepsilon}{Z_0}\right)\int_0^t \mathrm{e}^{P(s)(t-t')}Q_0\,\mathrm{e}^{P(s-1)t'}\,dt'$$

$$+s(s-1)\left(-\frac{\varepsilon}{Z_0}\right)^2\int_0^t \mathrm{e}^{P(s)(t-t')}Q_0dt'$$

$$\times\int_0^{t'}\mathrm{e}^{P(s-1)(t'-t'')}Q_0\,\mathrm{e}^{P(s-2)t''}\,dt''+\cdots\}\begin{pmatrix}E_0{}^s\\ W_0{}^s\end{pmatrix}. \qquad (5.1)$$

(5.1)において，s の原点を項別にずらすことができる。[6)]

(5.1)第 0 項$\mathrm{e}^{P(s)t}$ はずらし無し。これを次のように記す。

$$\mathrm{e}^{P(s)t}=\varPhi_0(s,t) \qquad (5.2)$$

(5.1)第 1 項で$s\to s+1$とすると，

$$第1項=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{ds}{E^{s+2}}(s+1)\left(-\frac{\varepsilon}{Z_0}\right)$$

$$\times\int_0^t\varPhi_0(s+1,t-t')Q_0\varPhi_0(s,t')dt'\begin{pmatrix}E_0{}^{s+1}\\ W_0{}^{s+1}\end{pmatrix}. \qquad (5.3)$$

括弧内の $1/Z_0$ はベクトル$\left(E_0^{s+1},W_0^{s+1}\right)$ のベキの 1 と打ち消し合う。分母E^{s+2} のベキのうちの 1 を括弧内へ繰り込むと，

$$(5.3)式=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{ds}{E^{s+1}}(s+1)\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)$$

$$\times\varPhi_1(s,t)\begin{pmatrix}E_0{}^s\\ W_0{}^s\end{pmatrix}, \qquad (5.3)'$$

ただし，

$$\varPhi_1(s,t)=\int_0^t\varPhi_0(s+1,t-t')Q_0\varPhi_0(s,t')dt'. \qquad (5.4)$$

第 2 項で$s\to s+2$とすると，

$$第2項=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{ds}{E^{s+3}}(s+2)(s+1)\left(-\frac{\varepsilon}{Z_0}\right)^2$$

$$\times\int_0^t\varPhi_0(s+2,t-t')Q_0\varPhi_1(s,t')dt'\begin{pmatrix}E_0{}^{s+2}\\ W_0{}^{s+2}\end{pmatrix}. \qquad (5.5)$$

括弧内の $1/Z_0{}^2$ は$\left(E_0^{s+2},W_0^{s+2}\right)$のベキの 2 と打ち消し合う。分母$E^{s+3}$ のベキのうち 2 を括弧内へ繰り込むと，

$$(5.5)式=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{ds}{E^{s+1}}(s+2)(s+1)\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^2$$

$$\times\varPhi_2(s,t)\begin{pmatrix}E_0{}^s\\ W_0{}^s\end{pmatrix}. \qquad (5.5)'$$

ただし，

$$\varPhi_2(s,t)=\int_0^t\varPhi_0(s+2,t-t')\,Q_0\,\varPhi_1(s,t')\,dt'. \qquad (5.6)$$

同様にして，(5.1)第 n 項のメリン逆変換は次のようになる；

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{ds}{E^{s+1}}\frac{(s+n)!}{s!}\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n$$

$$\times\int_0^t\varPhi_0(s+n,t-t')Q_0\varPhi_{n-1}(s,t')dt'\begin{pmatrix}E_0{}^s\\ W_0{}^s\end{pmatrix}. \qquad (5.7)$$

ゆえに，

$$\begin{pmatrix}\pi(E,t)\\ \gamma(E,t)\end{pmatrix}=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{ds}{E^{s+1}}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s+n)!}{s!}\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n\varPhi_n(s,t)\begin{pmatrix}E_0{}^s\\ W_0{}^s\end{pmatrix},^{※)} \qquad (5.8)$$

$$\varPhi_n(s,t)=\int_0^t\varPhi_0(s+n,t-t')Q_0\varPhi_{n-1}(s,t')dt',$$

$$\varPhi_0(s,t)=\mathrm{e}^{P(s)t},\ Q_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}. \qquad (5.9)$$

※）われわれの定式化に基づく(5.8)は，入射電子の創る電子成分$(e\to e)$について西村の与えた B 近似解；[3)] $\pi(E,t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int ds\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{1}{E}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n\phi_n(s,t)$, を含んだ，4 成分$(e\to e,\ e\to\gamma,\ \gamma\to e,\ \gamma\to\gamma)$を統一した表式である。

ここで，$\Phi_0(s,t)=\mathrm{e}^{P(s)t}$ を

$$\Phi_0(s,t)=\begin{pmatrix} a_0(s,t) & b_0(s,t) \\ c_0(s,t) & d_0(s,t) \end{pmatrix}$$

と表すと

$$a_0(s,t)=H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}+H_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t},$$

$$b_0(s,t)=\sqrt{s}M(s)\left(\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}-\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}\right),$$

$$c_0(s,t)=\frac{L(s)}{\sqrt{s}}\left(\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}-\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}\right),$$

$$d_0(s,t)=H_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}+H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t},$$

と表される。[1),2),3)]

6. 入射電子の創る電子成分$(e\to e)$

カスケード中の電子成分には，入射電子から創られる成分と入射光子から創られる成分とが重ね合わされる。すなわち，

$$\Phi_n(s,t)=\begin{pmatrix} a_n(s,t) & b_n(s,t) \\ c_n(s,t) & d_n(s,t) \end{pmatrix}$$

と表せば，

$$\pi(E,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{ds}{E^{s+1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s+n)!}{s!}\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n$$

$$\times\left(a_n(s,t)E_0{}^s+b_n(s,t)W_0{}^s\right).$$

このうち入射電子（入射エネルギー E_0 ）が創る電子成分は，

$$\pi(E,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{ds}{E}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s+n)!}{s!}\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n a_n(s,t),$$

$$a_n(s,t)=\int_0^t a_0(s+n,t-t')a_{n-1}(s,t')dt'. \quad (6.1)$$

6.1. $a_n(s,t)$の計算

漸化式(6.1)を計算する。

$\mathrm{Re}(\alpha)>0$ として$a_n(s,t)$のラプラス変換を

$L_n(\alpha,t)$とする。

$$L_n(\alpha,t)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}a_n(s,t)dt$$

$$=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}dt\int_0^t a_0(s+n,t-t')a_{n-1}(s,t')dt'.$$

積分順序を変更する。

$\int_0^\infty dt\int_0^t dt'=\int_0^\infty dt'\int_{t'}^\infty dt$　を用いると，

$$L_n(\alpha,t)$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_{t'}^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}a_0(s+n,t-t')dt\right)a_{n-1}(s,t')dt'.$$

$t-t'=\tau$ とおく。

$$L_n(\alpha,t)$$

$$=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t'}\left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha\tau}a_0(s+n,\tau)d\tau\right)a_{n-1}(s,t')dt'$$

$$=L_0(s+n,\alpha)L_{n-1}(s,\alpha).$$

よって，

$$L_n(\alpha,t)=\prod_{k=0}^{n}L_0(s+n-k,\alpha).$$

$$L_0(s,\alpha)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}+H_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}\right)dt$$

$$=\frac{H_1(s)}{\alpha-\lambda_1(s)}+\frac{H_2(s)}{\alpha-\lambda_2(s)}.$$

$H_1(s)=\dfrac{\lambda_1(s)+\sigma_0}{\lambda_1(s)-\lambda_2(s)}$ [1),2),3)] および

$H_2(s)=1-H_1(s)$ を用いると，

$$L_0(s,\alpha)=\frac{\alpha+\sigma_0}{\left(\alpha-\lambda_1(s)\right)\left(\alpha-\lambda_2(s)\right)}.$$

ゆえに，

$$L_n(s,\alpha)=\prod_{k=0}^{n}\frac{\alpha+\sigma_0}{\left(\alpha-\lambda_1(s+k)\right)\left(\alpha-\lambda_2(s+k)\right)}.$$

$a_n(s,t)$ は $L_n(\alpha,t)$ のラプラス逆変換から,

$$a_n(s,t)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mathrm{e}^{\alpha t}d\alpha\prod_{k=0}^{n}\frac{\alpha+\sigma_0}{\left(\alpha-\lambda_1(s+k)\right)\left(\alpha-\lambda_2(s+k)\right)}.$$

留数定理を用いると積分結果に

$\mathrm{e}^{\lambda_1(s+k)t},\mathrm{e}^{\lambda_2(s+k)t}$ （$k=0,1,\cdots,n$）が現れる。$t\gtrsim 1$ の領域では，最も主要な項は $\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$ で他の項はほぼ無視できる。この理由から $\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$ の項のみを採用する近似が一般に用いられる。しかし第Ⅲ稿以降で ”エネルギー流” を扱う必要から，ここでは極めて浅い領域（$0.01\leqq t<1$）をも対象にする。

そのため，$\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}$ に次いで主要な項 $\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}$ の寄与も採り入れる。すなわち,

$$a_n(s,t)$$
$$=\rho_n(s)H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}+\mu_n(s)H_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}, \quad (6.2)$$

$$\rho_n(s)$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda_1(s)+\sigma_0}{\left(\lambda_1(s)-\lambda_1(s+k)\right)\left(\lambda_1(s)-\lambda_2(s+k)\right)}, \quad (6.3)$$

$$\mu_n(s)$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{\lambda_2(s)+\sigma_0}{\left(\lambda_2(s)-\lambda_1(s+k)\right)\left(\lambda_2(s)-\lambda_2(s+k)\right)}. \quad (6.4)$$

よって,

$$\pi(E_0,E,t)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{ds}{E}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s+n)!}{s!}\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n$$
$$\times\left(\rho_n(s)H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}+\mu_n(s)H_2(s)\mathrm{e}^{\lambda_2(s)t}\right). \quad (6.5)$$

6.2. Prony 内挿法を用いて無限級数和を求める

(6.5)の級数和の第 1 項を $S_1(s)$，第 2 項を $S_2(s)$ とおく。$S_1(s)$，$S_2(s)$ は次のように表現できる：

$$S_1(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s+n}{n}\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n\cdot n!\rho_n(s),$$
$$S_2(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s+n}{n}\left(-\frac{\varepsilon}{E}\right)^n\cdot n!\mu_n(s).$$

Prony 内挿法 [7] を用いて

$$\left.\begin{aligned} n!\rho_n(s)&=\sum_{i=1}^{N}C_i(s)\alpha_i(s)^n,\\ n!\mu_n(s)&=\sum_{i=1}^{N}D_i(s)\beta_i(s)^n \end{aligned}\right\} \quad (6.6)$$

と表すと,

$$S_1(s)=\sum_{i=1}^{N}C_i(s)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s+n}{n}\left(-\frac{\varepsilon}{E}\alpha_i(s)\right)^n,$$

$$S_2(s)=\sum_{i=1}^{N}D_i(s)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s+n}{n}\left(-\frac{\varepsilon}{E}\beta_i(s)\right)^n.$$

係数 $C_i(s),\alpha_i(s);D_i(s),\beta_i(s)\left(i=1,\cdots,N\right)$ は $\rho_n(s);\mu_n(s)\left(n=0,1,\cdots,2N-1\right)$ からそれぞれ一意的に求められる。[8]

$|x|<1$ のとき $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{s+n}{n}(-x)^n=\frac{1}{(1+x)^{s+1}}$ となる。ここで E を十分大きな値にとれば $\varepsilon\alpha_i(s)/E<1$，$\varepsilon\beta_i(s)/E<1$ とできるので $S_1(s),S_2(s)$ は存在し次のように求められる。

$$\left.\begin{aligned} S_1(s)&=\sum_{i=1}^{N}C_i(s)\left(1+\frac{\varepsilon\alpha_i(s)}{E}\right)^{-s-1},\\ S_2(s)&=\sum_{i=1}^{N}D_i(s)\left(1+\frac{\varepsilon\beta_i(s)}{E}\right)^{-s-1}. \end{aligned}\right\} \quad (6.7)$$

(6.5)は結局つぎのようになる。

$$\pi(E,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_c E_0^{\,s}ds$$
$$\times\{H_1(s)\mathrm{e}^{\lambda_1(s)t}\sum_{i=1}^{N}\frac{C_i(s)}{\left(E+\varepsilon\alpha_i(s)\right)^{s+1}}$$

$$+H_2(s)e^{\lambda_2(s)t}\sum_{i=1}^{N}\frac{D_i(s)}{\left(E+\varepsilon\beta_i(s)\right)^{s+1}}\}. \qquad (6.8)$$

(6.7)における分数 $\varepsilon\alpha_i(s)/E$， $\varepsilon\beta_i(s)/E$ の分母と分子がここで分離する。よって，これ以降は“ E を十分大きな値にとる”という条件を外すことができ， $E\to 0$ とすることが可能となる。

7. 積分スペクトル $\Pi(E_0,0,t)$ の表式

積分スペクトルを計算する。

$$\Pi(E_0,E,t)=\int_E^{E_0}\pi(E,t)dE$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c E_0^{\ s}\frac{ds}{s}\{H_1(s)e^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times\sum_{i=1}^{N}C_i(s)\left(\frac{1}{\left(E+\varepsilon\alpha_i(s)\right)^s}-\frac{1}{\left(E_0+\varepsilon\alpha_i(s)\right)^s}\right)$$

$$+H_2(s)e^{\lambda_2(s)t}$$

$$\times\sum_{i=1}^{N}D_i(s)\left(\frac{1}{\left(E+\varepsilon\beta_i(s)\right)^s}-\frac{1}{\left(E_0+\varepsilon\beta_i(s)\right)^s}\right)\}. \quad (7.1)$$

(7.1)で $E\to 0$ とすると

$$\Pi(E_0,0,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s\frac{ds}{s}$$

$$\times\{H_1(s)e^{\lambda_1(s)t}$$

$$\times\sum_{i=1}^{N}C_i(s)\left(\frac{1}{\alpha_i(s)^s}-\frac{1}{\left(E_0/\varepsilon+\alpha_i(s)\right)^s}\right)$$

$$+H_2(s)e^{\lambda_2(s)t}$$

$$\times\sum_{i=1}^{N}D_i(s)\left(\frac{1}{\beta_i(s)^s}-\frac{1}{\left(E_0/\varepsilon+\beta_i(s)\right)^s}\right)\}. \qquad (7.2)$$

ここでは $E_0/\varepsilon=10^2\sim10^8$ のような値を対象にするから(7.2)の小括弧内第 2 項は何れも無視できる。よって(7.2)は次式になる。

$$\Pi(E_0,0,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s\frac{ds}{s}\times$$

$$\times\left(H_1(s)e^{\lambda_1(s)t}\sum_{i=1}^{N}\frac{C_i(s)}{\alpha_i(s)^s}+H_2(s)e^{\lambda_2(s)t}\sum_{i=1}^{N}\frac{D_i(s)}{\beta_i(s)^s}\right). \qquad (7.3)$$

さらに，第Ⅱ稿で示すように次の関係が成り立つ；

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}C_i(s)\,\alpha_i(s)^{-s}&=K_1(s,-s),\\ \sum_{i=1}^{N}D_i(s)\,\beta_i(s)^{-s}&=K_2(s,-s).\end{aligned}\right\} \qquad (7.4)$$

ゆえに,

$$\Pi(E_0,0,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\left(\frac{E_0}{\varepsilon}\right)^s\frac{ds}{s}$$

$$\times\{H_1(s)K_1(s,-s)e^{\lambda_1(s)t}+H_2(s)K_2(s,-s)e^{\lambda_2(s)t}\}. \qquad (7.5)$$

これは Rossi-Greisen の与えた表式 [1] である。つまり先達の用いた数学的方法とは異なる, 鈴木 - Trotter 公式と Prony 内挿法を用いる定式化によって, 先達が得たのと同じ結果の得られることが示された。

数値計算やグラフは第Ⅱ稿に示す。

8. 遷移曲線のエネルギースペクトル

(7.1)において $\varepsilon\alpha_i,\varepsilon\beta_i\ll E\ll E_0$ であるような E を考えて，$\varepsilon\alpha_i(s)=\varepsilon\beta_i(s)=0$ とおく。第Ⅱ稿で示すように $\sum C_i(s)=\sum D_i(s)=1$ が成り立つから，よく知られたA近似積分スペクトルの表式が得られる：

$$\Pi(E_0,E,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_c\left(\frac{E_0}{E}\right)^s\frac{ds}{s}$$

$$\times\left(H_1(s)\,e^{\lambda_1(s)t}+H_2(s)\,e^{\lambda_2(s)t}\right). \qquad (8.1)$$

よって次の 2 点が結論される。

⑴ われわれの定式化はA近似理論とB近似理論を統一したものである。

⑵ (7.1)は，エネルギー範囲 $0\leqq E<E_0$ の遷移曲線のエネルギースペクトルを与える。

参考文献

1）B.Rossi and K.Greisen,Rev.Mod.Phys. **13**(1941),240.

2）B.Rossi,*HighEnergyPhysics*(Englewood Cliffs, N.J:Prentice-Hall,Inc.,1952).

3）J. Nishimura, Handbuch der Physik, **XLVI/2**(1967),1.

4）M.Suzuki,Commun.Math.Phys.**51**(1976),183.

5）H.F.Trotter, Proc.Amer.Math.Soc.**10**(1959),545.

6）J.Bhabha,F.R.S.Chakrabarty,Proc.R.Soc.London(Ser.A,Math.And Phys.)**181**(1943).

7）日高孝次，数値積分法（岩波書店，1942）

8）新居誠彦，足利工業大学研究集録第 51 号(2017.3).

原稿受付日 平成 31 年 1 月 1 日

※）足利大学名誉教授