

電磁カスケード理論 A 近似エネルギー流の計算

I. 電子数の遷移曲線の計算

新居 誠彦*

A Calculation of Transition Curves for Energy Flow
under Approximation A in Electron-Photon Cascade Theory.

I. Calculation of transition curves for number of electron.

Nobuhiko Nii

Abstract

We calculate three kinds of transition curve for electron component in cascade shower, under Approximation A in one-dimensional electron-photon cascade theory. One of the transition curves is for number of electron, and the others are for energy flow of electron and for average energy of a single electron.

Keywords : One-dimensional electron-photon cascade theory, Energy flow transition curve, Approximation A.

1. はじめに

(1) 本論文は 2 つの稿からなる。電磁カスケード A 近似理論に基づいて、本稿 (第 I 稿) では①電子数の遷移曲線を計算する。第 II 稿では②電子のエネルギー流遷移曲線の計算を行う。さらに③単位電子エネルギー流の遷移曲線の計算を①②の結果を組み合わせて行う。3 つの結果を第 II 稿にグラフで示す。

(2) 電磁カスケード理論において A 近似理論および B 近似理論と呼ばれる 2 つの理論がある。A 近似理論は電離損失の効果が無視できるような高いエネルギーをもつ電磁成分を対象にする理論である。電離損失の効果を考慮した低いエネルギーまでを対象にする理論は B 近似理論と呼ばれる。

エネルギー流の、B 近似遷移曲線とラテラル分布関数 (A, B 近似) の計算は別途報告の予定。

2. 1 次元 A 近似拡散方程式と解

2.1. 拡散方程式

媒質に入射した粒子 (電子または光子) は媒質の構成要素と相互作用して電磁カスケードを生じる。カスケードの発生点を $t=0$ とし、深さが $t \sim t+dt$ の層においてエネルギー $E \sim E+dE$ をもつ電子, 光子の数を $\pi(E,t)dEdt$, $\gamma(E,t)dEdt$ と記す。深さに対する電子数, 光子数の変化は次の 1 次元 A 近似拡散方程式で表される。^{1),2)}

$$\frac{\partial \pi(E,t)}{\partial t} = -A'\pi(E,t) + B'\gamma(E,t), \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial \gamma(E,t)}{\partial t} = C'\pi(E,t) - \sigma_0\gamma(E,t). \quad (2.1.2)$$

$-A'\pi$, $B'\gamma$ は輻射, 対創生による電子数の変化を, $C'\pi$, $-\sigma_0\gamma$ は輻射, 対創生による光子数の変化を表す。

2.2. メリン変換

拡散方程式をメリン変換すると演算子 $-A'$, B', C' の演算が実行できる。¹⁾

関数 $f(x)$ のメルリン変換は, s を複素数として,

$$f(x) \rightarrow \mathfrak{M}_f(s) = \int_0^\infty x^s f(x) dx.$$

$$\text{逆変換は } f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \mathfrak{M}_f(s) x^{-s-1} ds.$$

(2.1.1), (2.1.2) にメルリン変換を施す。

$$\int_0^\infty \pi(E, t) E^s dE = \mathfrak{M}_\pi(s, t),$$

$$\int_0^\infty \gamma(E, t) E^s dE = \mathfrak{M}_\gamma(s, t)$$

と記すと, 右辺の各項は

$$-\int_0^\infty A' \pi(E, t) E^s dE = -A(s) \mathfrak{M}_\pi(s, t),$$

$$\int_0^\infty B' \gamma(E, t) E^s dE = B(s) \mathfrak{M}_\gamma(s, t),$$

$$\int_0^\infty C' \pi(E, t) E^s dE = C(s) \mathfrak{M}_\pi(s, t)$$

と表される。よって拡散方程式は,

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_\pi(s, t) \\ \mathfrak{M}_\gamma(s, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A(s) & B(s) \\ C(s) & -\sigma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_\pi(s, t) \\ \mathfrak{M}_\gamma(s, t) \end{pmatrix}.$$

解は

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_\pi(s, t) \\ \mathfrak{M}_\gamma(s, t) \end{pmatrix} = \exp(P(s)t) \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_\pi(s, 0) \\ \mathfrak{M}_\gamma(s, 0) \end{pmatrix}, \quad (2.2.1)$$

$$P(s) = \begin{pmatrix} -A(s) & B(s) \\ C(s) & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.2)$$

($A(s), B(s), C(s), \sigma_0$ の数値は文献 1 参照)。

カスケードの初期条件を, エネルギーが E_0 の電

子・ W_0 の光子の同時入射とすると

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_\pi(s, 0) \\ \mathfrak{M}_\gamma(s, 0) \end{pmatrix} = \int_0^\infty E^s \begin{pmatrix} \delta(E - E_0) \\ \delta(E - W_0) \end{pmatrix} dE \\ = \begin{pmatrix} E_0^s \\ W_0^s \end{pmatrix}. \quad (2.2.3)$$

$e^{P(s)t} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表し, 4 成分を補遺 1 に示す。

とくに,

$$a = H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} + H_2(s) e^{\lambda_2(s)t}. \quad (2.2.4)$$

2.3. 電子数の微分スペクトル

(2.2.1) をメルリン逆変換して

$$\begin{pmatrix} \pi(E, t) \\ \gamma(E, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{ds}{E^{s+1}} e^{P(s)t} \begin{pmatrix} E_0^s \\ W_0^s \end{pmatrix}. \quad (2.3.1)$$

入射粒子を電子, 光子の同時入射としたから電子成分, 光子成分の一般解は, それらの重ね合わせになる ($\pi(E, t)$ や $\gamma(E, t)$ を”微分スペクトル”と呼ぶ)。

s -積分の部分を除いた微分スペクトルは,

$$\pi(E, t) \sim aE_0^s + bW_0^s, \quad \gamma(E, t) \sim cE_0^s + dW_0^s.$$

単独入射の場合には重畳の一方を採用すればよい。

入射電子の創る電子成分は aE_0^s のみ (以後, 親粒子のエネルギーを明らかにするため微分スペクトルに含めて記す)。

入射電子の創る電子成分微分スペクトルは,

$$\pi(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{ds}{E} \\ \times \left(H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} + H_2(s) e^{\lambda_2(s)t} \right). \quad (2.3.2)$$

2.4. 電子数積分スペクトル

2.4.1. エネルギー積分

微分スペクトルをエネルギーで積分すれば積分スペクトル $\Pi(E_0, E, t)$ が得られる。積分範囲は閾エネルギーから入射エネルギーまで。

$$\Pi(E_0, E, t) = \int_E^{E_0} \pi(E_0, E, t) dE \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_c \left\{ \left(\frac{E_0}{E} \right)^s - 1 \right\} \frac{ds}{s} \times$$

$$(1 - A(s)\Delta t)(1 + a \ln(E_0/E)\Delta t) \\ = 1 + (a \ln(E_0/E) - A(s))\Delta t + o(\Delta t)^2.$$

§ 5.1, 図 1-2. でみるように, 例えば $E_0/E = 10^2$, $s = 0.2$ で $a = \Delta s_1/\Delta t \simeq 0.35$. 一方, カスケード理論より $A(0.2) \simeq 0.29$ である。よって

$a \ln(E_0/E) - A(0.2) \simeq 1.3 > 0$. つまりカスケードの初期では電子の数は増大していく。

3. 鞍点法

(2.4.4)の被積分関数は実軸方向に最小値をもつから虚軸方向に最大値をもつ。よって s -積分は鞍点法を用いて実行できる。

$$\Pi(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c e^{s \ln \frac{E_0}{E} - \ln s + \ln f(s, t)} ds, \quad (3.1)$$

$$f(s, t) = \sum H_i(s) e^{\lambda_i(s)t}. \quad (3.2)$$

(3.1)の被積分関数の指数部分を $g(s, t)$ とおき, 鞍

点 s_1 のまわりで展開する:

$$g(s, t) = s \ln \frac{E_0}{E} - \ln s + \ln f(s, t), \quad (3.3)$$

$$g(s, t) = g(s_1, t) + g'(s_1, t)(s - s_1) \\ + (1/2)g''(s_1, t)(s - s_1)^2. \quad (3.4)$$

鞍点 s_1 は

$$g'(s, t) = \ln \frac{E_0}{E} - \frac{1}{s} + \frac{f'(s, t)}{f(s, t)} = 0 \quad (3.5)$$

の解として求められる (これをエイジとも呼ぶ)。

エイジ s_1 を通り虚軸に平行に積分路をとり

$$s = s_1 + i\sigma \text{ とおく。 } ds = i d\sigma.$$

$$\Pi(E_0, E, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{g(s_1, t) - \frac{1}{2}g''(s_1, t)\sigma^2} d\sigma \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{g(s_1, t)}}{\sqrt{g''(s_1, t)}} \\ = \frac{\left(\frac{E_0}{E}\right)^s \frac{1}{s} f(s, t)}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{1}{s^2} + \left(\frac{f'(s, t)}{f(s, t)}\right)'}} \Big|_{s=s_1}, \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{f'(s, t)}{f(s, t)}\right)' = \frac{f''(s, t)}{f(s, t)} - \left(\frac{f'(s, t)}{f(s, t)}\right)^2, \quad (3.7)$$

$$f'(s, t) = \sum (H_i'(s) + H_i(s)\lambda_i'(s)t) e^{\lambda_i(s)t}, \quad (3.8)$$

$$f''(s, t) \\ = \sum (H_i'' + H_i\lambda_i''t + 2H_i'\lambda_i't + H_i\lambda_i'^2t^2) e^{\lambda_i t} \Big|_s. \quad (3.9)$$

4. 浅い領域・深い領域の表式

4.1. $t=0$ における表式

カスケードの発生点, $t=0$, における表式を検討する。(3.6)~(3.9)で $t \rightarrow 0$ とする。

$$f(s, 0) = \sum H_i(s) = 1,$$

いまの場合は微分と極限の順序が交換できて,

$$f'(s, 0) = \left(\sum H_i(s)\right)' = 0,$$

$$f''(s, 0) = \left(\sum H_i(s)\right)'' = 0.$$

よって,

$$\Pi(E_0, E, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{E_0}{E}\right)^{s_1}.$$

エイジは(3.5)から $s_1 = 1/\ln(E_0/E)$. ゆえに

$$\Pi(E_0, E, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{E_0}{E}\right)^{1/\ln(E_0/E)} \\ = \frac{e}{\sqrt{2\pi}} = 1.0844\dots \quad (4.1.1)$$

$t=0$ における電子数は 1 であるべきだが, “鞍点

法は $\Pi(E_0, E, 0) = 1$ を有効数字 2 桁で再現する” ということができる (誤差はほぼ 8%)。

4.2. 深い領域での表式

深さが適当に深い領域 ($e^{\lambda_2(s)t} \ll e^{\lambda_1(s)t}$ が成り立つ領域。 $t \geq 2$ ならばほぼ満たされる) では表式を簡略することができる。まず(3.2)において

$$f(s, t) \simeq H_1(s) e^{\lambda_1(s)t} \text{ と近似できる。さらに}$$

$H_1(s)$ の変化は $(E_0/E)^s$ や $1/s$, $e^{\lambda_1(s)t}$ の変化に比

べて緩いので $H_1'(s) \simeq 0$, $H_1''(s) \simeq 0$ と見做す

ことができる。よって

$$\frac{f'(s, t)}{f(s, t)} = \lambda_1'(s)t,$$

$$\frac{f''(s, t)}{f(s, t)} = \lambda_1''(s)t + (\lambda_1'(s)t)^2,$$

$$\left(\frac{f'(s, t)}{f(s, t)} \right)' = \frac{f''(s, t)}{f(s, t)} - \left(\frac{f'(s, t)}{f(s, t)} \right)^2 = \lambda_1''(s)t. \quad (4.2.1)$$

ゆえに,

$$\Pi(E_0, E, t) = \frac{\left(\frac{E_0}{E} \right)^s \frac{1}{s} H_1(s) e^{\lambda_1(s)t}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\lambda_1''(s)t + 1/s^2}} \Big|_{s=s_1}. \quad (4.2.2)$$

エイジ s_1 は次式の解である。

$$\ln \frac{E_0}{E} + \lambda_1'(s)t - \frac{1}{s} = 0. \quad (4.2.3)$$

5. 遷移曲線 $\Pi(E_0, E, t) (t \geq 0)$ のグラフ

5.1. エイジ

鞍点法から求めた $s_1 = s_1(t)$ を図 1-1 に示す。

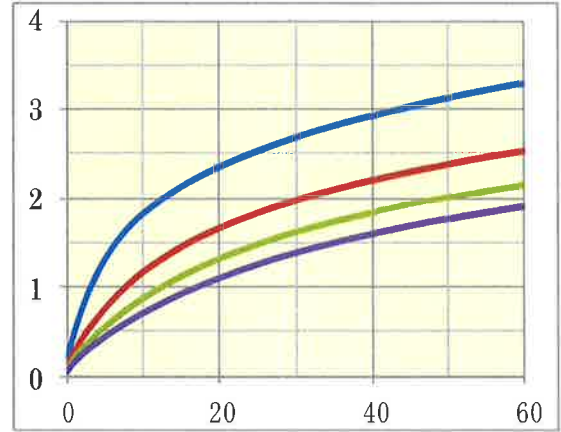


図 1-1. s_1 vs. t

(上から順に $E_0/E = 10^2, 10^4, 10^6, 10^8$)

$t=0$ におけるエイジは(3.5)から

$$s_1 = 1/\ln(E_0/E). \quad E_0/E = 10^2, 10^4, 10^6, 10^8$$

に対して次の値をもつ:

$$s_1 = 0.2171, 0.1085, 0.07238, 0.05428.$$

$0.01 \leq t \leq 10$ の範囲における $s_1(t)$ の詳細なグラフを図 1-2 に示す。

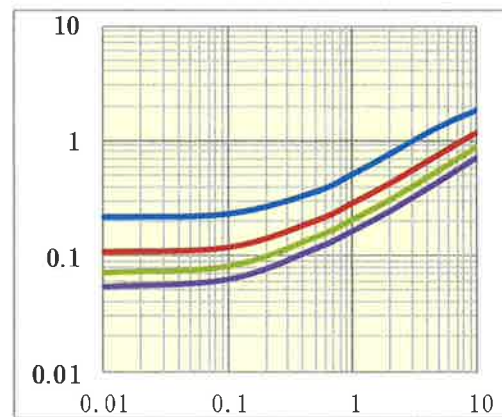


図 1-2. s_1 vs. t (順序は図 1-1 と同様)

5.2. 電子数の遷移曲線

電子数遷移曲線を図 2-1 に示す。

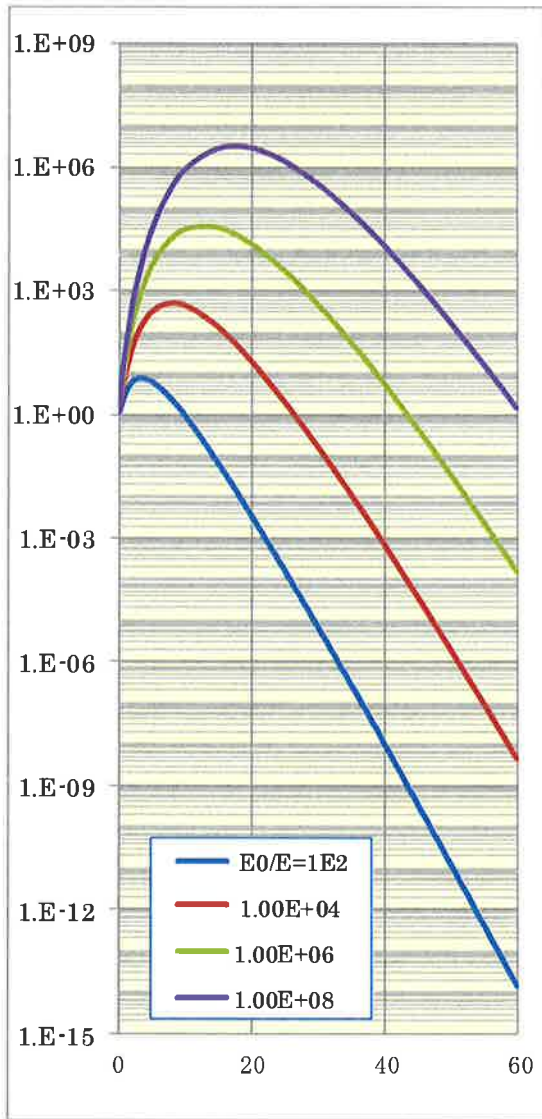


図 2-1. $\Pi(E_0, E, t)$ vs. t

$0.01 \leq t \leq 10$ の範囲における $\Pi(E_0, E, t)$ の詳細なグラフを図 2-2 に示す。

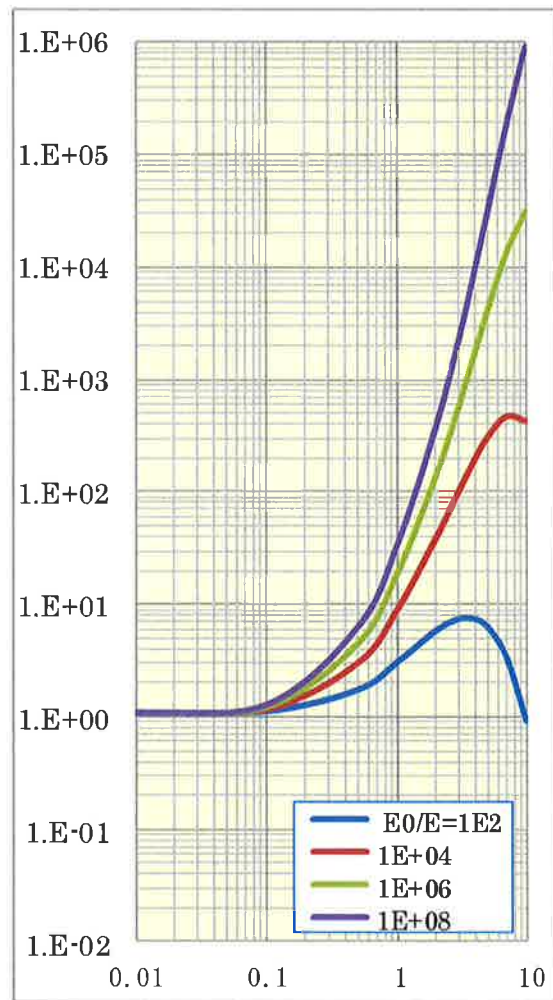


図 2-2. $\Pi(E_0, E, t)$ vs. t

文献

- 1) J.Nishimura, Handbuch der Physik. XLVI/2(1967),1.
- 2) B.Rossi and K.Greisen, Rev. Mod. Phys. 13, Cosmic-Ray Theory (1941),240.
- 3) 新居誠彦, 足利工業大学研究集録 第 50 号 3次元電磁カスケード理論A近似ラテラル分布関数の計算 (2016.3),38.
- 4) 新居誠彦, 足利工業大学研究集録 第 51 号 3次元電磁カスケード理論B近似ラテラル分布関数の計算 (2017.3),84.

補遺

補遺 1. 指数行列 $\exp(P(s)t)$ の表式

$$P(s) = \begin{pmatrix} -A(s) & B(s) \\ C(s) & -\sigma_0 \end{pmatrix} \text{ の固有は}$$

$$\begin{vmatrix} -A(s) - \lambda & B(s) \\ C(s) & -\sigma_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ から,}$$

$$\lambda_{1,2}(s) = \frac{1}{2}(-A(s) - \sigma_0) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A(s) - \sigma_0)^2 + 4B(s)C(s)}.$$

対角化行列 S, S^{-1} は

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\lambda_1(s) + A(s)}{B(s)} & \frac{C(s)}{\lambda_2(s) + \sigma_0} \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}$$

$$\times \begin{pmatrix} \lambda_1(s) + \sigma_0 & B(s) \\ \lambda_1(s) + A(s) & -B(s) \end{pmatrix}.$$

$$S^{-1}P(s)S = \begin{pmatrix} \lambda_1(s) & 0 \\ 0 & \lambda_2(s) \end{pmatrix},$$

$$e^{P(s)t} = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(s)t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(s)t} \end{pmatrix} S^{-1} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

- a : 電子が創る電子成分 (輻射),
- b : 光子が創る電子成分 (対創生),
- c : 電子が創る光子成分 (輻射),
- d : 光子が創る光子成分 (対創生による吸収).

$$a = \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} e^{\lambda_1(s)t} - \frac{\lambda_2(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} e^{\lambda_2(s)t},$$

$$b = \frac{B(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} (e^{\lambda_1(s)t} - e^{\lambda_2(s)t}),$$

$$c = \frac{C(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} (e^{\lambda_1(s)t} - e^{\lambda_2(s)t}),$$

$$d = -\frac{\lambda_2(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} e^{\lambda_1(s)t} + \frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} e^{\lambda_2(s)t}.$$

カスケード理論では次の表記がよく使われる:

$$\frac{\lambda_1(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} = H_1(s),$$

$$-\frac{\lambda_2(s) + \sigma_0}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} = H_2(s),$$

$$\frac{B(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} = \sqrt{s}M(s),$$

$$\frac{C(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)} = \frac{L(s)}{\sqrt{s}}.$$

とくに $H_1(s) + H_2(s) = 1$.

$$a = H_1(s)e^{\lambda_1(s)t} + H_2(s)e^{\lambda_2(s)t},$$

$$b = \sqrt{s}M(s)(e^{\lambda_1(s)t} - e^{\lambda_2(s)t}),$$

$$c = \frac{L(s)}{\sqrt{s}}(e^{\lambda_1(s)t} - e^{\lambda_2(s)t}),$$

$$d = H_2(s)e^{\lambda_1(s)t} + H_1(s)e^{\lambda_2(s)t}.$$

補遺 2. (2.4.5)の導出

$t \ll 1$ において

$$a = H_1(s)(1 + \lambda_1(s)t) + H_2(s)(1 + \lambda_2(s)t) + o(t)^2.$$

恒等式; $H_1(s) + H_2(s) = 1$ と

$\lambda_1(s) + \lambda_2(s) = -A(s) - \sigma_0$ を用いると

$$a = 1 - A(s)t + o(t)^2.$$

※ 足利工業大学名誉教授

原稿受付日 平成 30年 1月 1日